
Aufgabe 1 (*Hahn-Banach für $\mathbb{C}$-lineare Funktionale*)
Sei X ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum und $V \subset X$ ein Unterraum (mit der induzierten Norm). Dann gibt es zu $\varphi \in V'$ ein $\phi \in X'$ mit

$$\phi = \varphi \text{ auf } V \quad \text{ und } \quad \|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}.$$

Anleitung : Setzen Sie erst $\varphi_1 = \operatorname{Re}\varphi : V \to \mathbb{R}$ fort.

Aufgabe 2 (*Invertierbarkeit von Operatoren*)
Konstruieren Sie einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und eine bijektive Abbildung $F \in L(X,X)$, für die F^{-1} nicht in $L(X,X)$ liegt.

Aufgabe 3 (*Zur Voraussetzung in Folgerung 4.4*)
Finden Sie ein Beispiel einer konvexen Menge $K \subset (X, \|\cdot\|)$ mit $0 \notin K$, so dass kein $\varphi \in X'$, $\varphi \neq 0$, existiert mit

$$\varphi(x) \leq 0 \quad \text{ für alle } x \in K.$$

Aufgabe 4 (*Trennen von konvexen Mengen*)
Seien $A, B \subset (X, \|\cdot\|)$ konvex und $A \cap B = \emptyset$. Ist A abgeschlossen und B kompakt, so können A und B strikt getrennt werden, das heißt es gibt ein $\varphi \in X'$ mit

$$\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x \in B} \varphi(x).$$

Abgabe am Mittwoch, 8. Dezember, in der Vorlesung.