Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis — WS 04/05, Serie 8
Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 7. Dezember 2004

Aufgabe 1 (*Stetigkeit von Bilinearformen*)
Seien X, Y Banachräume und $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Für feste $x \in X$ bzw. $y \in Y$ seien die Abbildungen $B(x, \cdot)$ bzw. $B(\cdot, y)$ stetig. Zeigen Sie, dass B bezüglich der Norm $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ stetig ist.

Anleitung : Betrachten Sie für $\|y\| = 1$ die Familie $\beta_y : X \to \mathbb{R}$, $\beta_y(x) = B(x, y)$.

Aufgabe 2 (*Stützebenen konvexer Mengen*)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie, dass in jedem $x_0 \in \partial M$ eine Stützebene existiert, d.h. es gibt ein $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$, so dass gilt:

$$M \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - x_0, \nu \rangle \leq 0\}.$$

Aufgabe 3 (*Konvexe Hülle*)
Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subset X$. Die konvexe Hülle von A ist

$$\operatorname{conv}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, x_i : k \in \mathbb{N},\, x_i \in A,\, \alpha_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\operatorname{conv}(A)$ ist konvex und $\operatorname{conv}(A) = \bigcap\{K : K \text{ konvex}, A \subset K\}$.

(b) A offen $\quad\Rightarrow\quad$ $\operatorname{conv}(A)$ ist offen.

(c) A konvex $\quad\Rightarrow\quad$ $\bar{A}$ und $\operatorname{int}(A)$ sind konvex.

(d) Für abgeschlossenes A ist nicht notwendig $\operatorname{conv}(A)$ abgeschlossen.

Aufgabe 4 (*Punktweise konvergente Operatoren*)
Sei X ein Banachraum, Y normierter Raum und $T_n \in L(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, punktweise konvergent, d.h. für $x \in X$ existiert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Zeigen Sie:

(a) $T \in L(X, Y)$ und $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

(b) Finden Sie ein Beispiel mit $'' <''$ in der Ungleichung aus (a).

Abgabe am Mittwoch, 15. Dezember, in der Vorlesung.