

Aufgabe 1 (*Eindeutigkeit der Jordan-Hahn-Zerlegung*)

Sei λ ein signiertes Maß auf der σ -Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$. Beweisen Sie, dass die Darstellung $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ mit zueinander singulären Maßen λ^\pm eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 (*Satz von Radon-Nikodym für signierte Maße*)

Formulieren und beweisen Sie eine Fassung des Satzes von Radon-Nikodym für signierte Maße.

Aufgabe 3 (*Kettenregel für Radon-Nikodym-Dichten*)

Betrachten Sie auf einer σ -Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$ die σ -endlichen Maße μ_0, μ_1, μ_2 mit $\mu_2 \ll \mu_1 \ll \mu_0$. Zeigen Sie, dass für μ_0 -fast-alles $x \in X$ gilt:

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_0} = \frac{d\mu_2}{d\mu_1} \frac{d\mu_1}{d\mu_0}.$$

Aufgabe 4 (*Grenzwerte der L^p -Normen*)

Sei μ ein Maß äußeres Mass mit $\mu(X) = 1$, und $u : X \rightarrow [0, \infty)$ sei μ -messbar. Bestimmen Sie für $p \rightarrow \pm\infty$ die Grenzwerte, falls existent, der Funktion

$$\phi(p) = \left(\int_X u^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Abgabe am Mittwoch, 22. Dezember, in der Vorlesung.