(2) $\|u_\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

(3) $\|u-u_\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{mit } \rho \to 0.$

3.4 Lemma (Lokalizierung der Glättung)
Sei $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$. Auf $\Omega_\rho = \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > \rho\}$ ist $u_\rho = \eta_\rho * u$ wohldefiniert und gilt $\|u-u_\rho\|_{L^p(\Omega')} \overset{\rho\to 0}{\to} 0$ für alle $\Omega' \subset \Omega$.

3.5 Lemma (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\int u \cdot \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in C^\infty_0(\Omega)$ und $\xi \geq 0$.
Dann ist $u(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$

3.6 Folgerung. Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt (falls existiert). Insbesondere ist sie gleich die klassische Ableitung für C^1-Funktionen.

3.7 Lemma Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwach differenzierbar.
Dann gilt $D(\eta_\rho * u) = \eta_\rho * Du$ in Ω_ρ.

3.8 Lemma Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Dann gilt $\partial_i(\varphi u) = (\partial_i \varphi) u + \varphi \partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

3.9 Lemma Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit f' beschränkt. Dann gilt $D(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot Du \in L^1_{loc}(\Omega)$.