2. Woche

1.10 Definition Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Funktion $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls

- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (Positiv homogenität)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, für alle $x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

$(X, \|\cdot\|)$ heißt normierte Raum.

Bemerkung: Mit der von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik

$$d(x, y) = \|x-y\|$$

ist X dann ein metrischer Raum.

1.11 Definition. $(X, \|\cdot\|)$ heißt ein Banach Raum, falls X bzgl d vollständig ist.

1.12 Beispiele (i) Sei M eine Menge, $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$B(M, X) = \left\{ f: M \to X \mid \sup_{t \in M} \|f(t)\|_X < \infty \right\}$$

ein Vektorraum mit der Norm

$$\|f\|_{B(M,X)} = \sup_{t \in M} \|f(t)\|_X .$$

ii) $B(M, X)$ ist Banach Raum, wenn X Banach ist.

1.13 Anwendung des Beispiels: Beweis von Satz 1.8.

1.14. Definition. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ heißen äquivalent, falls mit einer Konstanten $C > 0$ gilt

$$C^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

1.15 Beispiele a) Auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) ist jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm, also sind je zwei Normen auch zueinander äquivalent.

b) Die Normen auf $C^0([0,1])$.

$$\|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \,,\quad \|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

sind nicht äquivalent.

<u>1.16 Satz</u>. Auf einem endlich-dimensionale Vektorraum X sind je zwei Normen äquivalent.

<u>1.17 Satz</u>. Endlich-dim. Vektorraum des normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind vollständig, insbesondere abgeschlossen.

<u>1.18 Beispiel</u> $C^0([0,2])$ als Unterraum von dem Banach Raum $(L^1([0,2]), \|\cdot\|_{L^1})$ ist nicht vollständig.

<u>1.19 Definition</u> (i) $K \subset M$ heißt <u>(folgen-) kompakt</u>, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

ii) $K \subset M$ heißt <u>überdeckungskompakt</u>, falls jede offene Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von K eine <u>endliche</u> Teilüberdeckung besitzt.

<u>1.20 Satz</u>. Sei (X,d) metrischer Raum. Für $K\subset X$ sind äquivalent:

(i) K ist <u>überdekungskompakt</u>.

(ii) K ist <u>folgenkompakt</u>.

(iii) K ist <u>vollständig</u> (mit der induzierten Metrik) und ~~pra~~ <u>präkompakt</u>, d.h. für jedes $\rho > 0$ läßt sich K durch endlich viele Kugeln $B_\rho(x_j)$, $1\le j\le N$, mit $x_i\in K$, überdecken.

1.21 Satz Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $\dim(X) < \infty$

(ii) Die Einheitssphäre in X,
$$S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\},$$
ist kompakt.

1.22 Lemma (Riesz): Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linear Unterraum $Y \neq X$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ ein $x \in X$ mit

(i) $\|x\| = 1$

(ii) $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \varepsilon$

Bemerkung: a) Abgeschlossenheit von Y ist nicht kann verzichten

b) Falls X Hilbertraum ist, ist auch $\varepsilon = 0$ zugelassen

1.23 Definition Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A: X \to Y$ heißt beschränkt, falls gilt:
$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty.$$
Wir schreiben $L(X,Y) = \{A: X \to Y \mid A \text{ linear}, \|A\| < \infty\}$

$\|A\|$ ist auf $L(X,Y)$ eine Norm, „die operatornorm"

1.24 Lemma Für $A: (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ linear sind die folgende Aussagen ägivalent:

(i) A ist beschränkt.
(ii) A ist Lipschitz stetig
(iii) A ist gleichmässig stetig auf X
(iv) A ist stetig im jeden Punkt $x_0 \in X$
(v) A ist stetig in 0 in X.

<u>1.25 Satz.</u> Sei X endlich-dimensional. $A: X \to Y$ linear. Dann ist A (Lipschitz) stetig.

<u>1.26 Satz</u> Sei Y Banach Raum, X normierter Raum. Dann ist $L(X,Y)$, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum.

<u>1.27 Definition</u> Sei X normierter Vektorraum. Dann heißt der Banachraum $X' = L(X, \mathbb{K})$, versehen mit der Operatornorm, der <u>Dualraum</u> von X.

<u>1.28 Bemerkung.</u> Sei $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Dann gilt $\|B \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. Also

$$B \cdot A \in L(X,Z)$$

<u>1.29 Satz</u> Sei X Banachraum, $V \subset X$ abgeschlossen Unterraum. Dann ist X/V mit $\|[x]\| := \inf_{v \in V} \|x+v\|$ wieder ein Banachraum. Ausserden, die Projektion $p: X \to X/V$ ist lin. offenes lineares Operator mit der Operatornorm

$$\|p\| = 1$$