lineare Funktionalanalysis

1 Topologische Grundlagen

§1 Metrische und normierte Räume

1.1 Definition. Sei X eine Menge. Dann heißt $d: X \times X \to \mathbb{R}$ Metrik und (X,d) metrischer Raum, falls gilt:

(i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle x,y. (Symmetrie)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

1.2 Beispiele

a) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} = \|x-y\|$

(b) $X = C^0([0,1])$, $d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

(c) $X = C^0([0,1])$ $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

(d) $X = \mathbb{R}^\infty = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

1.3 Definition $\mathcal{U} \subset X$ heißt *offen*, falls es zu jedem $x \in \mathcal{U}$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset \mathcal{U}$, wobei $B_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$

1.4 Lemma (Topologie auf metrischen Räumen)
Sei (X,d) metrischer Raum

(i) Ist Λ eine beliebige Indexmenge und ist $\mathcal{U}_\lambda \subset X$ offen für alle $\lambda \in \Lambda$. So ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ offen

(ii) Ist I eine endliche Indexmenge und ist $\mathcal{U}_i \subset X$ offen für alle $i \in I$. So ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ offen

(iii) Zu $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt es offenen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ mit $x_i \in \mathcal{U}_i$ $(i=1,2)$ und $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$

1.5 Bemerkungen über Topologie

Ist M eine beliebige Menge, so heißt ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von M Topologie, falls $\mathcal{T}$ unter Bildung von beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und außerdem $\emptyset, M \in \mathcal{T}$ gilt. Die Menge in $\mathcal{T}$ nennt man dann offen, ihrer Komplemente abgeschlossen. Jedes $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ mit $m \in \mathcal{U}$ heißt dann Umgebung von m. Eine Folge $(m_k) \subset M$ wird als konvergiert (bzgl. $\mathcal{T}$) gegen m zeichnet, falls jede Umgebung $\mathcal{U}$ von m alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthielt. Ist außerdem (iii) richtig, d.h. ist (M, d) Hausdorffsch, so sind Grenzwerte eindeutig bestimmt.

Weitere Bezeichnungen für $A \subset (X, d)$

$\operatorname{int} A = \{x \in X \mid \exists\, \rho = \rho(x) > 0 \text{ mit } B_\rho(x) \subset A\}$ offen

$\bar{A} = \{x \in X \mid B_\rho(x) \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } \rho > 0\}$ abgesch.

$\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$ abgeschlossen

A abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow X \setminus A$ offen

$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$

A beschränkt $\Leftrightarrow \operatorname{diam} A < \infty$

A dicht in $X \Leftrightarrow \bar{A} = X$

X heißt <u>separabel</u>, falls eine dichte Teilmenge enthielt, die abzählbar ist.

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) = \inf\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$$

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

<u>1.6 Definition</u> In einen metrischen Raum (X, d) heißt die Folge (x_k)

konvergent $\Leftrightarrow$ $\exists x \in X$ mit $\lim_{k \to \infty} d(x, x_k) = 0$

Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ für $k, l > K$

<u>1.7 Definition</u> (X, d) heißt vollständig (complete), falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

<u>Beispiele</u>

- $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x - y|$ vollständig
- $X = C^0([0,1])$, $d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$ vollständig
- $X = \mathbb{Q}^n$, $d(x, y) = |x - y|$, nicht vollständig
- $X = C^0([0,1])$, $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| x$ nicht vollständig

1.8 Satz (Vervollständigungsprinzip, Cantor 1890)
Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es eine abstandstreue (isometrische) Einbettung

$$T: (X, d) \to (\hat{X}, \hat{d}),$$

wobei $(\hat{X}, \hat{d})$ vollständig ist und $T(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Diese ist eindeutig in folgendem Sinne.

sind $T_i : (X, d) \to (\hat{X}_i, \hat{d}_i)$, so gibt es genau eine Isometrie (= abstandstreue Bijektion) $\Phi: \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ mit $T_2 = \Phi \circ T_1$

1.9 Beispiele

(a) $X = \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$, $\hat{X} = \mathbb{R}$

(b) $X = C^0([0,2])$, $d(f,g) = \int_0^2 |f(t) - g(t)|\, dt$

$\hat{X} = L^1([0,2])$