

5.9 Satz (kanonische Isomorphismen für T, T')

Sei $T \in L(X, Y)$ und $\text{Bild}(T)$ abgeschlossen. Dann ist $\text{Bild}(T')$ auch abgeschlossen und es gilt

$$(1) \quad \ker(T') \cong (\text{coker } T)'$$

$$(2) \quad \text{coker}(T') \cong (\ker T)'$$

5.10 Folgerung. Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator.

Dann ist $T' \in L(Y', X')$ ebenfalls Fredholmsch und $\text{ind}(T') = -\text{ind}(T)$

5.11 Folgerung. Sei $T \in L(X, Y)$ mit abgeschlossenem Bild.

Dann gilt das Kriterium

$$Tx = y \text{ lösbar} \Leftrightarrow \psi(y) = 0 \text{ für alle } \psi \in \ker(T').$$

5.12 Lemma. (1) (Satz vom abgeschlossenen Komplement)

Sei Y abgeschlossener Unterraum eines Banachraum X .

Ist Z ein algebraisches Komplement von Y , also

$X = Y \oplus Z$, und $P_Y: X \rightarrow Y$ die hierdurch definierte

lineare Projektion auf dem ersten Summanden, so

sind äquivalent:

(a) P_Y ist stetig

(b) Z ist abgeschlossen.

(2) Sei V ein Unterraum eines Banachraum X .

Falls $\dim V < \infty$ oder falls V abgeschlossen, und

$\dim(X/V) < \infty$, so hat V ein abgeschlossenes

Komplement.

5.13 ^{Satz} Die Menge $F(X, Y)$ der Fredholmoperatoren ist

offen in $L(X, Y)$. Der Index ist auf $F(X, Y)$

lokal konstant.