5.15 Folgerung. $T \in L(X,Y)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn es $S_1, S_2 \in L(Y,X)$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbb{1}_X - S_1 T,\ \mathbb{1}_Y - T S_2 \text{ sind kompakt.}$$

(und es kann $S_1 = S_2 = S$ gewählt werden, S heißt eine Parametrix)

5.16 Folgerung. Sei $T_0 \in L(X,Y)$ Fredholmsch, $K \in L(X,Y)$ kompakt. Dann ist $T = T_0 + K$ ebenfalls Fredholmsch und $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_0)$

5.17 Satz Seien $T_1 \in L(X,Y)$, $T_2 \in L(Y,Z)$ Fredholmsch. Dann ist $T_2 T_1 \in L(X,Z)$ Fredholmsch und es gilt

$$\operatorname{ind}(T_2 T_1) = \operatorname{ind}(T_2) + \operatorname{ind}(T_1)$$

Anwendung auf elliptische Randwertprobleme

5.18 Satz (Einbettungssatz von Rellich)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, wenn $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Inklusion $I: W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ kompakt.

5.19 Lemma Sei $u \in L^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

(i) $\| u \circ \tau_h - u \|_{L^p} \leq |h| \, \|Du\|_{L^p}$ $\quad (h \in \mathbb{R}^n,\ \tau_h(x) = x+h)$

(ii) $\| u - u_\rho \|_{L^p} \leq \rho \, \|Du\|_{L^p}$. $\quad (u_\rho = \eta_\rho * u,\ \int \eta = 1)$

5.20 Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator

$$K: W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$$

$$(Kv)(u) = \int \langle b, Du \rangle v + \langle c, Dv \rangle u + q u v$$

für $b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $q \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist K kompakt

5.21 Satz Betrachte für Ω offen und beschränkt den Operator $L = L_0 + K$ mit

$$L_0 v = -\operatorname{div}(a D v)$$
$$K v = -\operatorname{div}(b v) + \langle c, Dv \rangle + q v$$

Voraussetzungen:

(B) beschränkte Koeffizienten:
$a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$, $b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $q \in L^\infty(\Omega)$

(E) Elliptisch: $\langle \xi, a(x) \xi \rangle \geq \mu |\xi|^2$ $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$
mit einen $\mu > 0$

Dann ist $L: W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ ein Fredholmoperator von Index Null. Insbesondere gilt die Alternativ

$$L \text{ injektiv} \Leftrightarrow L \text{ surjektiv}$$

Betrachte nun

$$\begin{array}{ccc}
W_0^{1,2}(\Omega) & \searrow^{L'J =: L^*} & \\
J \downarrow & & \\
W_0^{1,2}(\Omega)'' & \xrightarrow{L'} & W_0^{1,2}(\Omega)'
\end{array}$$

$L^* := L' \circ J : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ bezeichne als den adjungierten Operator von L, es gilt

$$L^* v = -\operatorname{div}(a^* D v) - \operatorname{div}(c v) + \langle b, Dv \rangle + q v$$

5.22 Satz (Lösbarkeitskriterium für Dirichletproblem)
sei $L = L_0 + K : W^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ wie in Satz 5.21.
Für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ sind äquivalent:

(1) $Lv = \varphi$ besitzt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

(2) $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in \ker(L^*)$.