§6 Spektraldarstellung kompakter Operatoren

6.1 Definition. Sei $A \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}$ Banachraum über $\mathbb{K}$ ($\underset{=}{\text{meist}}$ $\mathbb{C}$)

Resolventenmengen: $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : A - \lambda \mathbb{1} \text{ invertierbar}\}$

$\lambda \in \rho(A)$ heißt regulär bzgl. A.

Resolventenfunktion: $R_A : \rho(A) \to L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda \mathbb{1})^{-1}$$

Spektrum $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$

$\lambda \in \sigma(A)$ heißt Spektralwert

Das Spektrum wird in drei Teile zerlegt:

(1) Punktspektrum $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}\}$.

$\lambda \in \sigma_p(A)$ heißt Eigenwert

$\ker(A - \lambda \mathbb{1})$ heißt Eigenraum

(2) kontinuierliche Spektrum

$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : A - \lambda \mathbb{1}$ injektiv, nicht surjektiv

Aber $(A - \lambda \mathbb{1})(\mathfrak{X})$ dicht in $\mathfrak{X}\}$

(3) Residualspektrum

$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : A - \lambda \mathbb{1}$ injektiv und $(A - \lambda \mathbb{1})(\mathfrak{X})$ nicht dicht $\}$

6.2 Satz (allgemeine Eigenschaften von Resolvent und Spektrum)

(1) $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A)) \geq \|R_A(\lambda)\|$.

insbesondere $\rho(A)$ offen. $R_A : \rho(A) \to L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ ist analytisch

(2) $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\| < \infty$

Insbesondere $\sigma(A)$ nichtleer und kompakt.

6.3 Satz (Spektrum kompakter Operatoren in Banachräume)

Sei $\mathfrak{X}$ Banachraum über $\mathbb{C}$ und $K \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ kompakt.

(1) Jeder von Null verschieden Spektralwert ist sogar Eigenwert.

(2) Das Spektrum $\sigma(K)$ ist kompakte, höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{C}$. Der einzige mögliche Häufungspunkt ist $0 \in \mathbb{C}$.

(3) $\dim \mathfrak{X} = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(K)$

6.4 Satz (Normalform für kompakte operatoren)

Sei $\mathfrak{X}$ Banachraum über $\mathbb{C}$ und $K \subset L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ kompakt

Für jeden Spektralwert $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, gibt es eine eindeutige bestimmte Zerlegung

$$\mathfrak{X} = N(\lambda) \oplus F(\lambda)$$

mit folgender Eigenschaften

(1) $N(\lambda)$ und $F(\lambda)$ sind abgeschlossen, invariant (unter K) Unterräume mit $\dim N(\lambda) = \operatorname{Codim} F(\lambda) < \infty$

(2) $(K - \lambda \mathbb{1}) : N(\lambda) \to N(\lambda)$ ist nilpotent.

$(K - \lambda \mathbb{1}) : F(\lambda) \to F(\lambda)$ ist isomorph.

Außerdem.

(3) $\operatorname{Ker}(K - \lambda \mathbb{1}) \subset N(\lambda)$, insbesondere ist der Eigenraum endlichdimensional.

(4) $N(\lambda) \subset F(\mu)$ für $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu \in \sigma(K) \setminus \{0\})$

Bemerkung:

$\dim (K - \lambda \mathbb{1}) =$ geometrische Vielfachheit von λ

$\dim (K - \lambda \mathbb{1})^n =$ algebraische — " — — " —