6.5 Def. und Lemma. Sei X, Y Hilberträume über $\mathbb{K}$. Zu $T \in L(X, Y)$ gibt es genau ein $T^* \in L(Y, X)$ mit

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x \in X, y \in Y$$

T^* heißt adjungierten Operator von T.

6.6 Definition. Sei X Hilbertraum über $\mathbb{K}$. $A \in L(X, X)$ heißt normal, falls gilt

$$[A, A^*] := AA^* - A^*A = 0.$$

- $A^* = A$ hermitsch (selbstadjungiert)
- $A^* = -A$ schiefhermitsch
- $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$ unitär

6.7 Lemma X Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $A \in L(X, X)$ sei normal. Dann folgt

(1) $\ker A = \ker A^*$ und $\|Ax\| = \|A^* x\|$, $\forall x \in X$.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda) = \|A\|$.

6.8 Definition. Der Hilbertraum X heißt Hilbertsumme der abgeschlösenen Unterräume E_j $(j \in J)$, falls gilt:

(1) $E_i \perp E_j$ für $i \neq j$

(2) $\bigoplus\limits_{j \in J} E_j$ ist dicht in X

6.9 Satz Sei $\{E_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ ein System abgeschlossener paarweise orthogonaler Unterräume des Hilbertraumes X, mit zugehörigen Projektionen P_j. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\{E_j\}$ maximal: $x \perp E_j$ für alle $j \Rightarrow x = 0$.
(2) $\mathfrak{X}$ ist Hilbert~~raum~~summe der E_j.
(3) $x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j x$ für alle x (Fourierentwicklung)
(4) $\|x\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|P_j x\|^2$ für alle x (Parseval-Identität)

6.10 Satz (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren)
Sei $\mathfrak{X}$ Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $\dim \mathfrak{X} = \infty$ und $K \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ kompakt und normal. Dann gilt
(1) Das Spektrum $\sigma(K)$ ist kompakt mit einzig möglichen Häufungspunkt $0 \in \mathbb{C}$. Es ist $0 \in \sigma(K)$ und $\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K)\} = \|K\|$.
(2) Für $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ sind die Eigenräume $E_\lambda(K) = \ker(K - \lambda \mathbb{1})$ nicht trivial und endlich dim. Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.
(3) (Vollständigkeit) $\mathfrak{X}$ ist Hilbertsumme der Eigenräume $E_\lambda(K)$ ($\lambda \in \sigma(K)$).

6.11 Satz (Spektralsatz für kompakt, selbstadjungierte operatoren)
Sei $\mathfrak{X}$ Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und $K \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ kompakt und selbstadjungiert ($K = K^*$)
Dann gilt $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$ und die Aussagen von Satz 6.10 gelten (auch über $\mathbb{R}$)