1.30 Definition. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder

$(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf X, falls g

(i) $(x,y) = \overline{(y,x)}$, $\forall x,y \in X$,

(ii) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

(iii) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1.31 Bemerkung: In diesem Fall definiert

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}, \quad \forall x \in X$$

die Kanonische Norm.

1.32 Lemma (i) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Es gilt

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x,y \in X.$$

(ii) (Parallelogramm-Identität)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

1.33 Definition. Der Raum $(X, (\cdot,\cdot))$ heißt Hilbertraum, falls X bzgl. $\|\cdot\|$ vollständig ist.

~~1.34~~ Beispiele

1.34 Definition und Lemma. Sei Y ein Unterraum in X. Das Komplement von Y, $Y^\perp = \{z \in X \mid (z,y) = 0, \forall y \in Y\}$, ist ein abgeschlosser linearer Unterraum.

1.35 Bemerkung. i) Falls $\overline{Y} = X$, so gilt $Y^\perp = \cancel{\emptyset}\{0\}$

ii) Offenbar gilt $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1^\perp \supset Y_2^\perp$

1.36 Lemma. Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ genau ein $y_0 \in Y$ mit

$$\|x_0 - y_0\| = \operatorname{dist}(x_0, y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$$

und

$$(x_0 - y_0, Y) = 0, \quad \forall y \in Y.$$

1.37 Korollar. Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$, und sei $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $x_0 = y_0 + z$ mit $y_0 \in Y$, $z \in Y^\perp$ und

$$\|z\| = \operatorname{dist}(x_0, Y).$$

1.38 Satz. Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gilt

$$X = Y \oplus Y^\perp$$

und jedes $x \in Y$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$x = x' + x^\perp$$

mit $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x^\perp\|^2$. Insbesondere ist die Orthogonalprojektion $\pi_Y : X \to Y$ mit $\pi_Y(x) = x'$ stetig, und Y ist isometrisch zu $X/Y^\perp$

1.39 Lemma. Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. Dann gilt $Y^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} Y}$. Insbesondere ist $Y^{\perp\perp} = Y$ für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum $Y \subset X$.

§2 Prinzipien der Funktionalanalysis

2.1 Gleichmäßige Beschränktheit

2.1 Defintion. $T \in L(X,Y)$ heißt invertierbar, falls es $S \in L(Y,X)$ gibt mit $ST = id_X$ und $TS = id_Y$.

2.2. Satz. Sei $T \in L(X,Y)$ invertierbar.
(i) Ist $\|S-T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, so ist S auch invertierbar.
(ii) Die Mengen der invertierbaren Operatoren ist offen.

2.3. Satz (Kontinuitätsprinzip)
sei $L(t) \in L(X,Y)$, $0 \le t \le 1$, Schar von Operatoren, die stetig von t abhängen. Es gebe ein $c > 0$ mit

(*) $\|L(t)x\| \geq c\|x\|$ für $\forall x \in X$, $\forall t \in [0,1]$.

Ist dann $L(0)$ invertierbar, so auch $L(1)$.

2.4 Definition Ein Menge $S \subset (X,d)$ heißt nirgends dicht in $X \Leftrightarrow int(\overline{S}) \neq \phi$. S heißt von zweiter Kategorie $\Leftrightarrow$ S ist nicht abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.

2.5 Satz (Kategoriensatz von Baire):
Ein Vollstandiger metrischer Raum $(X,d) \neq \phi$ ist von zweiter Kategorie, d.h., ist $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, mit A_n abgeschlossen, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$int(A_m) \neq \phi.$$