2.6 <u>Lemma</u> Sei (X, d) vollständiger, metrischer Raum, Y normiert und $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$, die punktweise gleichmäßig beschränkt ist.

$$S(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X$$

Dann gibt es $x_0 \in X$ und $\rho > 0$ mit

$$\sup_{x \in B_\rho(x_0)} S(x) < \infty.$$

<u>2.7 Satz (Banach-Steinhaus, uniform boundedness prinziple)</u>
Sei X Banachraum, Y normiert, $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ punktweise gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$K(x) := \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt, d.h. $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$

<u>2.8 Folgerung</u> Sei $B: X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear und in jedem Argument stetig. Dann ist B stetig.

<u>2.9 Folgerung</u> Sei X vollständig. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ punktweise gegen $A: X \to Y$ konvergent. Dann ist A linear und stetig mit

$$\|A\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{j \to \infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} < \infty.$$

<u>2.10 Satz (von der offenen Abbildungen)</u>
Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h.

$$\Omega \subset X \text{ offen} \Rightarrow T(\Omega) \subset Y \text{ offen}.$$

2.11 Folgerung (Satz von der inversen Abbildung)

Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ bijektiv.
Dann ist T invertierbar, d.h. T^{-1} ist stetig.

2.12 Folgerung (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

Seien X, Y Banachräume und $T: X \to Y$ linear.
Dann sind äquivalent:

(1) $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ ist abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$.

(2) T ist stetig.

2.13 Satz (von Hahn-Banach)

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear, d.h.

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{für } \lambda \geq 0,\ x \in X$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{für } x, y \in X$$

Sei $V \subset X$ Unterraum, $\varphi: V \to \mathbb{R}$ linear und

$$\varphi(v) \leq p(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

Dann gilt es eine lineare Abbildung $\phi: X \to \mathbb{R}$ mit $\phi_{|V} = \varphi$ und

$$\phi(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

2.14 Satz (Hahn-Banach für linear Funktionale)

Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. $V \subset X$ ein Unterraum. Dann gibt es zu $\varphi \in V'$ ein $\phi \in X'$ mit

$$\phi = \varphi \text{ auf } V \text{ und } \|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}$$

(Fortsetzung mit gleicher Norm.