2.15 Folgerung. Sei V Unterraum von $(X, \|\cdot\|)$ und $x_0 \in X$ mit $\operatorname{dist}(x_0, V) > 0$. Dann gibt es ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$, so dass $\varphi|_V = 0$ und $\varphi(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, V)$

2.16 Folgerung (1) Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.

(2) Ist $\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in X'$, so gilt $x = 0$

(3) Seien $x, y \in X$. Dann gibt es ein $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

2.17 Folgerung. Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die Abbildung

$$J: X \to X'' = (X')', \quad (Jx)(\varphi) := \varphi(x)$$

eine isometrische Einbettung.

Bemerkung. Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung J surjektiv ist.

2.18 Definition. Die Mengen $A, B \subset X$ werden durch das Funktional $\varphi \in X'$, $\varphi \neq 0$, getrennt (strikt getrennt), falls

$$\sup_{x \in A} \varphi(x) \underset{(<)}{\leq} \inf_{x \in B} \varphi(x) \quad \text{(oder umgekehrt)}$$

2.19 Lemma Sei $K \subset (X, \|\cdot\|)$ offen und konvex sowie $0 \in K$. Dann ist

$$p(x) = \inf\{t > 0 \mid \tfrac{x}{t} \in K\}$$

sublinear und $K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$

2.20 Lemma. Sei $K \subset (X, \|\cdot\|)$ offen und konvex. Dann gibt es zu $x_0 \notin K$ ein $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ für alle $x \in K$, d.h. $\{x_0\}$ und K werden durch φ getrennt.

2.21 Satz (Hahn-Banach für konvexe Mengen) Seien $A, B \subset (X, \|\cdot\|)$ konvex, A offen und $A \cap B = \emptyset$. Dann können A, B durch ein $\varphi \in X'$ getrennt werden.

2.22 Folgerung. Seien $A, B \subset (X, \|\cdot\|)$ konvex, $A \cap B = \emptyset$. Sei A abgeschlossen und B kompakt. Dann können A und B strikt getrennt werden.

2.23 Folgerung Sei $K \subset (X, \|\cdot\|)$ konvex, $0 \notin \overline{K}$. Dann gibt es ein $\varphi \in K'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und

$$\varphi(x) \leq -\operatorname{dist}(0, K) \quad \forall x \in K.$$

2.24 Definition Sei $A \subset X$. Der Annihilator von A ist die Menge

$$A^{\perp} = \{\varphi \in X' \mid \varphi_{|A} = 0\}$$

2.25 Satz Sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) $x_0 \in \overline{M}$

(ii) $\varphi(x_0) = 0, \ \forall \varphi \in M^{\perp}$

2.26 Definition und Lemma. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Für $y \in H$ sei $Ty \in H'$

die Abbildung

$$T_y(x) = (y, x)$$

T ist eine lineare isometrische Einbettung.

<u>2.27 Satz (Rieszscher Darstellungssatz)</u> zu jedem $f \in H'$ gibt es genau ein $y \in H$ mit

$$f(x) = (y, x) = T_y(x). \quad \forall x \in H$$

<u>2.28 Satz (Lax-Milgram)</u> sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $a: H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear und stetig mit

$$|a(x,y)| \leq \Lambda \cdot \|x\| \cdot \|y\|. \quad \forall x, y \in H$$

Mit einer Konstanten $\lambda > 0$ gelte weiter

$$a(x,x) \geq \lambda \|x\|^2. \quad \forall x \in H \quad \text{(Koerzivität)}$$

Dann gibt es eine stetige Bijektion $A \in L(H)$ mit

$$a(x,y) = (Ax, y)_H. \quad \forall x, y \in H$$

und es gilt

$$\|A\|_{L(H)} \leq \Lambda \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\|_{L(H)} \leq \lambda^{-1}.$$