3 Sobolevräume

3.1. Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
u hat eine schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, falls $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ existiert mit

$$\int u \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = -\int g \cdot \xi \qquad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Wir beschreiben $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g$.

Allgemeinen

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ Multiindex

$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ Ordnung $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

$D^\alpha u = g$ schwach $\Leftrightarrow \int_\Omega u \, D^\alpha \xi = (-1)^{|\alpha|} \int g \, \xi$, $\forall \xi \in C_0^\infty(\Omega)$

3.2 Definition (die Glättung)

$\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Supp} \eta \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$

$\eta_\rho(x) = \rho^{-n} \eta\left(\frac{x}{\rho}\right)$, $\operatorname{supp} \eta_\rho \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \rho\}$

$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\rho(x)\,dx = 1$.

$$u_\rho(x) = (\eta_\rho * u)(x) = \int \eta_\rho(x-y)\, u(y)\,dy$$
$$= \int \eta_\rho(z)\, u(x-z)\,dz \quad \text{für } u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Beispiele:

(1) $$\eta(x) = \begin{cases} c \exp \frac{1}{|x|^2 - 1}, & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ~~η~~ $u_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(2) $\eta(x) = c\, \chi_{B_1(0)} \Rightarrow u_\rho(x) = ⨍_{B_\rho(x)} u(y)\,dy$.

3.3 Lemma Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $u_\rho = \eta_\rho * u$ ~~wie~~ wie oben

(1) Für $\tau_z(x) = x + z$ gilt $\|u \circ \tau_z - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$, $|z| \to 0$