3.10 Lemma Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $g \in L^1_{loc}(\Omega)$.
u hat die i-te schwache Ableitung $\partial_i u = g$ genau dann, wenn eine Folge $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ existiert so dass

$$\varphi_k \to u \text{ in } L^1_{loc}(\Omega) \text{ und } \partial_i \varphi_k \to g \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$

3.11 Lemma. Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$ und sei $\phi \in C^1(\tilde{\Omega}, \Omega)$ ein C^1-Diffeomorphismus

$\Rightarrow D(u \circ \phi) = (Du \circ \phi) \cdot D\phi \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$.

3.12 Definition $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \mid \partial_i u \in L^p(\Omega) \text{ für } 1 \le i \le n \}$$

mit der Norm $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^p}$

Allgemeiner: $u \in W^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ für $|\alpha| \le k$

$u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow D^\alpha u \in L^p_{loc}(\Omega)$ für $|\alpha| \le k$.

3.13 Satz $W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum

3.14 Satz. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$

3.15 Lemma (Teilung der Eins) Sei U offen.
Sei die Überdeckung $\Omega \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ lokal finit, d.h. es zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung $\overline{B_\varepsilon(x)}$ gibt, so dass $\{i, U_i \cap \overline{B_\varepsilon(x)} \neq \emptyset\}$ endlich ist. Weiter seien U_i beschränkt mit $\overline{U_i} \subset \Omega$. Dann existiert eine Partition der Eins, d.h. existiert $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\eta_i \in C_0^\infty(U_i),\ \eta_i \ge 0 \text{ und } \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta_j = 1 \text{ auf } \Omega.$$

3.16 (Satz) Für $1 \le p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

Bemerkung. Dagegen ist i.a. $C_0^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$

3.17 Definition (Funktionen mit verallgemeinerten Nullrandwerten)

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \exists\, u_k \in C_0^\infty(\Omega),\ u_k \xrightarrow{W^{1,p}} u,\ k\to\infty \}$$

3.18 (Poincaré-Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $1 \le p < \infty$ gilt

$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le d \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $d = \mathrm{diam}(\Omega)$

3.19 Satz $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist separabel.

Bemerkung. $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\ell^\infty(\mathbb{R})$ sind nicht separabel.

3.20 Definition und Lemma. Sei $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Für $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ sei $Tv \in (L^p(\mathbb{R}^n))'$ die Abbildung

$$Tv(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \, dx, \quad \forall\, u \in L^p.$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung

$$T: L^q \ni v \longmapsto Tv \in (L^p)'$$

erklärt. T ist linear und isometrisch, d.h.

$\|Tv\| = \|v\|_{L^q}$ für alle $v \in L^q(\Omega)$

3.21 Darstellungssatz von Riesz. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit $1 \le p < \infty$. Dann ist

$$T: L^q(\mathbb{R}^n) \to (L^p(\mathbb{R}^n))', \quad Tv(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \, dx$$

eine surjektive Isometrie.

	Separabel	Dualraum	reflexiv
L^p, $1<p<\infty$	ja	L^q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$	ja
L^1	ja	L^∞	nein
L^∞	nein	größer als L^1	nein