4. Schwache Konvergenz

4.1 Definition

(1) Sei X Banachraum

$x_k \to x$ schwach in X ($x_k \rightharpoonup x$)

$\Leftrightarrow$ $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X'$

(2) Sei X' Dualraum des Banachraums X

$\varphi_k \to \varphi$ schwach $*$ in X' ($\varphi_k \xrightarrow{*} \varphi$)

$\Leftrightarrow$ $\varphi_k(x) \to \varphi$ ~~schwach $*$ in~~ für alle $x \in X$

4.2 Satz (Eigenschaften der schwachen Konvergenz)

(1) Schwache bzw. schwache $*$-Grenzwerte sind eindeutig bestimmt (wenn existiert)

(2) Normkonvergenz $\Rightarrow$ schwache bzw. schwache $*$ Konvergenz

(3) Schwache bzw. schwache $*$ konvergente Folgen sind beschränkt.

(4) $x_k \to x$ schwach $\Rightarrow \|x\| \le \liminf\limits_{k\to\infty} \|x_k\|$

$\varphi_k \to \varphi$ schwach $* \Rightarrow \|\varphi\| \le \liminf\limits_{k\to\infty} \|\varphi_k\|$

(Unterhalbstetigkeit der Norm bei schwache bzw. schwach $*$-Konvergenz)

(5) $x_k \to x$ schwach, $\varphi_k \to \varphi$ stark (bzgl. der Norm)

oder $x_k \to x$ stark, $\varphi_k \to \varphi$ schwach $*$

$\Longrightarrow \varphi_k(x_k) \to \varphi(x)$.

(6) $T \in L(X,Y)$, $x_k \to x$ schwach $\Rightarrow Tx_k \to Tx$ schwach

(Lineare Operatoren stetig bzgl. schwacher Konvergenz)

4.3 Satz. Sei X separabeler Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' eine Teilfolge, die schwach $*$ gegen ein $\varphi \in X'$ konvergiert.

4.4 Lemma (2) X reflexiv $\Leftrightarrow X'$ reflexiv

(1) X reflexiv $\Rightarrow$ jeder abgeschlossene Unterraum $Y \subset X$ ist reflexiv

4.5 Satz Sei X reflxiver Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.

4.6 Satz Sei $K \subset X$ konvex und abgeschlossen. Falls $x_k \in K$, $x_k \to x \in X$ schwach, so ist $x \in K$

4.7 Folgerung Sei X reflexiv, $K \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in X$ mit $\|x_0 - x\| = \operatorname{dist}(x_0, K)$

4.8 Definition Ein Banachraum X heißt uniform konvex falls gilt: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ mit

$$\left(\|x\| = \|y\| = 1,\ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta\right) \Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon$$

4.9 Lemma Sei $(X, \|\cdot\|)$ uniform konvex. Falls $x_n, y_n \in$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leq 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \|y_n\| \leq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$ so folgt $\|x_n - y_n\| \to 0$

4.10 Folgerung. Sei $(X, \|\cdot\|)$ uniform konvex. Dann sind äquivalent:

(i) $x_n \to x$ bzgl $\|\cdot\|$

(ii) $x_n \to x$ schwach und $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$.