4.11 Definition. Sei $M \subset X$. Die Funktion $F: M \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz, falls für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \to x_0 \in M$ schwach in X gilt

$$F(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} F(x_k)$$

Beispiel 1) die Norm $\|\cdot\|$

2) sei $F: K \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, wobei $K \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist F auf K unterhalbstetig bzgl schwacher Konvergenz.

4.12 Lemma Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \to x$ schwach. Dann gibt es eine Folge von Konvexkombinationen $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k, \quad 0 \le a_{kl} \le 1, \ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1$$

und

$$y_l \to x \quad (l \to \infty) \quad (\text{stark!})$$

4.13 Definition: $F: M \subset X \to \mathbb{R}$ heißt <u>koerziv</u> auf M bzgl $\|\cdot\|$, falls gilt

$$F(x) \to \infty \qquad (\|x\| \to \infty,\ x \in M)$$

4.14 Satz (Variationsprinzip) Sei X reflexiv. $F: X \to \mathbb{R}$ koerziv und unterhalbstetig bzgl schwacher Konvergenz. Sei weiter F nach unten beschränkt. Dann existiert $x_0 \in X$ mit $F(x_0) = \inf_{x\in X} F(x)$.

Bemerkung. Falls F strikt konvex ist, dann kann F höchstens eine Minimalstelle in X besitzen

§ 5 Kompakte Operatoren und Fredholmoperator

5.1. <u>Definition</u>. Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt <u>kompakt</u>, falls für jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ ~~eine~~ die Folge $(Kx_n) \subset Y$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir bezeichnen den Vektorraum der kompakten Operatoren mit $K(X,Y) \subset L(X,Y)$.

5.2 <u>Lemma.</u> Für $K \in L(X,Y)$ sind äquivalent:

(1) K ist kompakt.

(2) $K(M)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Menge $M \subset X$

(3) Falls X reflexiv: K ist vollständig, d.h. $x_n \to x$ schwach in $X \Rightarrow Kx_n \to Kx$ stark in Y.

5.3 Lemma Die Menge kompakten Operatoren $K(X,Y)$ bildet einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.

5.4 Satz (1) Bei Verkettung gilt

stetig $\circ$ kompakt $=$ kompakt

kompakt $\circ$ stetig $=$ kompakt

(2) $K: X \to Y$ kompakt $\Rightarrow K': Y' \to X'$ kompakt, wobei $K': Y' \to X'$ definiert durch

$\forall \varphi \in Y'.\ K'\varphi = \varphi \circ K$.

5.5 Satz (Arzela-Ascoli) Seien X, Y metrische Räume. X kompakt und $\mathcal{F} \subset C^0(X,Y)$. Dann sind äquivalent

(1) $\mathcal{F}$ ist relativ kompakt in $C^0(X,Y)$

(2) Jede Folge f_k in $\mathcal{F}$ besitzt eine Teilfolge, die gleichmäßig konvergiert.

(3) $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig stetig und für alle $x \in X$ $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ relativ kompakt.

5.6 Definition Sei $f : (X, d) \to (Y, d)$.
Schwankung (Oszillation, Stetigkeitsmodul) von f $W_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$, $W_f(\delta) = \sup\limits_{d(x,x') \leq \delta} d(f(x), f(x'))$

f ist gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow$ $W_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : X \to Y$ heißt gleichgradig stetig $\Leftrightarrow$ $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}} W_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$.

5.7 Definition Seien X, Y Banachräume.
$T \in L(X, Y)$ heißt Fredholmoperator ($T \in F(X, Y)$)
$\Leftrightarrow$ Bild T ist abgeschlossener Unterraum und $\ker T$, $\operatorname{coker} T = Y / T(X)$ sind endlich dimensional

$\dim \ker T$ = Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung $Tx = 0$.

$\dim \operatorname{coker} T$ = Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen, die $y \in Y$ erfüllen muß, damit die inhomogene Gleichung $Tx = y$ lösbar ist.

5.8 Definition Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator.
$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \mathbb{Z}$$
heißt Index von T