Aufgabe 1
Sei X ein metrischer Raum und

$$B(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \,:\, \|f\|_0 < \infty\}$$

der Raum der beschränkten Funktionen auf X. Dabei ist $\|f\|_0 = \sup_X |f|$. Zeigen Sie die Existenz einer isometrischen Abbildung $G : X \to B(X,\mathbb{R})$, d. h.

$$\|G(x) - G(y)\|_0 = d(x,y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Aufgabe 2

(a) Welcher der folgenden Räume ist ein Banachraum?

1. $l^1 = \{\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \,:\, \|\xi\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$
2. $C^0([0,2])$ mit der L^2-Norm aus Analysis 3

(b) Welche der folgenden Mengen ist folgenkompakt in l^1?

1. $\{\xi \in l^1 \,:\, \|\xi\| \leq 1\}$
2. $\{\zeta = (z_n) \in l^1 \,:\, |z_n| \leq |x_n| \,\forall n\}$ für eine vorgegebene Folge $\xi = (x_n) \in l^1$.

Aufgabe 3
Auf der nichtleeren Menge X seien Metriken d und h gegeben. d heißt schwächer als h, falls

$$h(x_n, x) \to 0 \Rightarrow d(x_n, x) \to 0$$

für alle $x_n, x \in X$ richtig ist. Dann heißt h auch stärker. Gleichstarke Metriken heißen äquivalent.
Zeigen Sie, dass

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y, \end{cases}$$

die stärkste Metrik auf X ist und finden Sie zu einer beliebigen Metrik d eine äquivalente Metrik, die beschränkt ist.

Aufgabe 4
Der metrische Raum (X,d) sei beschränkt und

$$\mathfrak{A} = \{A \subset X \,:\, A \neq \emptyset, A \text{ abgeschlossen}\}.$$

Betrachten Sie für $A, B \in \mathfrak{A}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} \delta(A,B) &= \sup_{x\in A} d(x,B) \\ \Delta_{\mathcal{H}}(A,B) &= \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Dann ist $\Delta_{\mathcal{H}}$ eine Metrik auf $\mathfrak{A}$. (Hier ist $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$!)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 26.10.08, bis 9.15 Uhr.