Aufgabe 1
Zeigen Sie:

(1) Sei $A : X \to Y$ stetig, und sei $K : Y \to Z$ kompakt. Dann ist $A \circ K : X \to Z$ kompakt.

(2) Sei $K : X \to Y$ kompakt und sei $A : Y \to Z$ stetig. Dann ist $K \circ A : X \to Z$ kompakt.

Aufgabe 2
(Hilbert-Schmidt-Integraloperator)
Betrachten Sie für $k \in L^2(I \times I, \mathbb{C})$, $I = (0,1)$, den Operator $K : L^2(I, \mathbb{C}) \to L^2(I, \mathbb{C})$ mit $(Kf)(x) = \int_I k(x,y) f(y) dy$. Beweisen Sie:

(1) K ist wohldefiniert und stetig mit $\|K\| = \|k\|_{L^2(I \times I, \mathbb{C})}$.

(2) K ist ein kompakter Operator (verwenden Sie, dass Linearbombinationen von Produktfunktionen $w(x,y) = u(x)v(y)$ dicht in $L^2(I \times I, \mathbb{C})$ sind).

Aufgabe 3
(Dualraum von $W_0^{1,2}$)
Sei $X := L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie die Abbildung $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to X$, $Ju = (u, Du)$ und $P : X \to: W_0^{1,2}(\Omega)'$, $Pf(u) = \int_\Omega (fu + \langle F, Du \rangle)$. Die Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ sei so gewählt, dass J isometrisch einbettet. Zeigen Sie:

(1) $X = \ker P \oplus \operatorname{Bild} J$.

(2) P ist surjektiv, und für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ gilt $\|\varphi\| = \inf\{(f, F)_{L^2} : P(f, F) = \varphi\}$.

Aufgabe 4
Beweisen Sie, dass eine Lösung u_0 von

$$\int_\omega \langle Du_0, D\xi \rangle = \int_\Omega f\xi, \text{ für alle } \xi \in W^{1,2}(\Omega)$$

das Funktional $Q(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \langle Du, Du \rangle - \int_\Omega fu$ auf dem Raum $W^{1,2}(\Omega)$ minimiert.

Bearbeiten Sie bitte die Aufgaben 1 und 2.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 11.01.10, bis 9.15 Uhr.