Aufgabe 1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ elliptisch. Betrachten Sie $G = I \circ L^{-1} \circ I' : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ definiert als

$$Lv(u) = \int_\Omega \langle Du, aDv\rangle$$

und $I : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert als $Iv = v$ und $I' : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ definiert als

$$I' f(u) = \int_\Omega fu.$$

Beweisen Sie zunaechst $LGf = f$. Nehmen Sie nun an, dass a symmetrisch und zeigen Sie $G = G^*$ bezüglich des L^2 Skalarproduktes. $G^* : L^2 \to L^2$ ist definiert über die Identität

$$\int_\Omega (Gu)v = \int_\Omega u(G^* v) \quad \text{für alle } u, v \in L^2(\Omega).$$

Aufgabe 2
Sei $I = (0, \infty)$ und $\lambda \neq 0$. Betrachten Sie $A_\lambda : W_0^{1,2}(I) \to L^2(I)$ definiert als $A_\lambda u = u' + \lambda u$. Beweisen Sie

1. $\|u'\|_{L^2} \leq \|A_\lambda u\|_{L^2}$ und $\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|A_\lambda u\|_{L^2}$.
2. A_λ ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild.
3. $(\text{Bild}A_\lambda)^\perp = \{0\}$ und $\text{ind}(A_\lambda) = 0$ für $\lambda > 0$, $(\text{Bild}A_\lambda)^\perp = \text{Span}\{e^{\lambda x}\}$ und $\text{ind}(A_\lambda) = -1$ für $\lambda < 0$.
4. Der Operator $A_0(u) = u'$, d. h. $\lambda = 0$, ist injektiv, jedoch ist $\text{Bild}A_0$ dicht und nicht abgeschlossen.

(*Hinweis: Verwenden Sie die Vertauschbarkeit von Glättung und schwacher Ableitung.*)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass das unendliche Gleichungssystem

$$x_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i < \infty)$$

für jedes $b \in l^2(\mathbb{R})$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in l^2(\mathbb{R})$ besitzt, falls für jedes $N \in \mathbb{N}$ die $N \times N$ Matrix a postitiv semidefinit ist und $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty$.

Aufgabe 4 (*Neumann Problem*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes C^1-Gebiet, $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ und $q \in L^\infty(\Omega)$. Sei $L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)'$ schwach definert über

$$Lv = -\text{div}(aDv) + qv.$$

Außerdem sei a symmetrisch und elliptisch mit $\mu > 0$, d.h. es gelte $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

1. L ist ein Isomorphismus, falls $q(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in \Omega$.

2. L ist Fredholmsch mit Index Null.

3. Für die Existenz einer schwachen Lösung von

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(aDv) &= f \text{ in } L^2 \\ Dv \cdot an &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

   ist die Bedingung $\int_\Omega f = 0$ notwendig und hinreichend. Hier ist n das äußere Normalenvektorfeld an $\partial\Omega$ und $(an)_j = \sum_i a_{ij} n_i$ in lokalen Koordinaten.

(*hinweis: die einbettung* $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *ist für solche* Ω *kompakt nach dem Satz von Rellich, benutzen Sie dies als black box.*)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, den 18.01.10, bis 9.15 Uhr.