Aufgabe 1
Betrachten Sie den in der Vorlesung definerten Operator $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ mit $L = L_0 + K$ mit messbaren Koeffizienten a, b, c, q. L_0 sei elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Beweisen Sie für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ die Äquivalenz folgender Aussagen.
1.) $Lv = \varphi$ besitzt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.
2.) $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in \ker L^*$.
Dabei ist $L^* = L' \circ I$ und $I : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)''$ die kanonische Einbettung. Was bedeutet 2.), wenn die rechte Seite eine L^2 Funktion f ist?

Aufgabe 2
Zeigen Sie für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die Äquivalenz von
1.) $f \in \text{Lip}\,(\mathbb{R}^n)$
2.) $Df \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Anleitung: 1) folgt 2): Gewinnen Sie $D_i f$ als Grenzwert von Differenzenquotienten

$$D_i^h f(x) := \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

2) folgt 1): Glättung.

Aufgabe 3 (*Satz von Riesz über kompakte Operatoren*)
Sei $K \in L(X, X)$ ein kompakter Operator und $T = \text{id} - K$. Zeigen Sie
a) $\dim \ker T < \infty$.
b) Sei V das abgeschlossene Komplement von $\ker T$. Dann existiert ein $\mu > 0$, so dass

$$||Tv|| \geq \mu ||v|| \quad \forall v \in V.$$

c) Bild (T) ist abgeschlossen.
d) $\dim\,(\text{coker}\, T) < \infty$.
e) T ist Fredholmoperator mit ind $(T) = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 25.01.10, bis 9.15 Uhr.