Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis | WS 09/10, Serie 13
Prof. Dr. Guofang Wang, André Ludwig | 25.01.2010
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Funkana/funka.html

---

Aufgabe 1(*Spektrum von Multiplikationsoperatoren*)
Bestimmen Sie für den Operator $(Tf)(x) = xf(x)$ auf dem Banachraum $C^0(I, \mathbb{C})$, $I = [0, 1]$, mit Norm $||f|| = \max_{x\in I}|f(x)|$, die Spektralwerte und deren Typ.

Aufgabe 2(*Ehrling Lemma*)
Sei $K \in K(X, Y)$ und $T \in L(Y, Z)$ injektiv. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$, so dass für alle $x \in X$

$$||Kx||_Y \leq \varepsilon||x||_X + C_\varepsilon||TKx||_Z.$$

Aufgabe 3 (*Anwendung*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 < p < \infty$ und $m \geq 2$. Zeigen Sie:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante C_ε, so dass

$$||u||_{W_0^{k-1,p}(\Omega)} \leq \varepsilon||u||_{W_0^{k,p}(\Omega)} + C_\varepsilon||u||_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass auch $I : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Omega)$ kompakte Einbettung ist.

Aufgabe 4
Beweisen Sie, dass für $I = [0, 1]$ der Operator $K : C^0(I) \to C^0(I)$,

$$(Kf)(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

kompakt ist, aber keinen Eigenwert hat.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 01.02.10, bis 9.15 Uhr.