Aufgabe 1
Beweisen Sie für beliebige Banachräume X, Y und $T \in L(X, Y)$ die Aussagen
1.) Aus T surjektiv folgt T' injektiv.
2.) Aus T' surjektiv folgt T injektiv.
Dabei ist $T' : Y' \to X'$ die adjungierte Abbildung, d.h. $T'y'(x) = y'(Tx)$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von 2.) an.

Aufgabe 2
Sei X ein reeller Hilbertraum, $K \in L(X, X)$ kompakt, selbstadjungiert und positiv semidefinit (also $\langle Kx, x\rangle \geq 0$ für alle x). Zeigen Sie, dass Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren v_k für $k \geq 1$ auch induktiv wie folgt bestimmt werden können:
1.) $\lambda_k = \sup\{\langle Kx, x\rangle : \|x\| = 1,\ x \perp V_k\}$,
2.) v_k = zugehörige Maximumstelle,
3.) $V_k = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ und $V_0 = \{0\}$.
Werden hierdurch alle Eigenvektoren erfasst?

Aufgabe 3
Betrachten Sie auf $L^2(I), I = [0, 1]$ den Hilbert-Schmidt Integraloperator

$$(Gv)(x) = \int_I g(x, y)v(y)\, dy$$

mit

$$g(x, y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{für } 0 \leq y \leq x, \\ (1-y)x & \text{für } x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Eigenwerte von G sind $\left(\frac{1}{j\pi}\right)^2$ $(j \in \mathbb{N})$ mit Eigenfunktionen $v_j = \sin(j\pi x)$. Die Eigenfunktionen bilden eine Hilbertbasis von $L^2(I)$.

Aufgabe 4
Betrachten Sie das schwache Eigenwertproblem $\Delta u + \lambda u = 0$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ für den Quader

$$\Omega = \times_{i=1}^n (0, R_i) \quad \text{mit } R_1, \ldots, R_n > 0.$$

Definieren Sie dann für $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$
1.) $\lambda_k := \sum_{i=1}^n \lambda^i_{k_i}$ mit $\lambda^i_j := (\frac{j\pi}{R_i})^2$,
2.) $e_k(x) := \Pi_{i=1}^n e^i_{k_i}(x_i)$ mit $e^i_j(z) := \sqrt{\frac{2}{R_i}} \sin(\frac{j\pi}{R_i} z)$.
Zeigen Sie nun die Äquivalenz
(i) $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W^{1,2}_0(\Omega)$ Eigenlösung.
(ii) Es gibt ein k mit $\lambda = \lambda_k$ und $u \in \operatorname{span}\{e_l : \lambda_l = \lambda_k\}$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 08.02.10, bis 9.15 Uhr.