Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis | WS 09/10, Serie 2
Prof. Dr. Guofang Wang, André Ludwig | 26.10.2009
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Funkana/funka.html

---

Aufgabe 1
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $(\hat{X}, \hat{d})$ seine Vervollständigung für die induzierte Metrik. Zeigen Sie, dass man Struktur und Norm kanonisch von X auf $\hat{X}$ übertragen kann, und dass dadurch $\hat{X}$ ein Banachraum wird.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen.

1. Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.
2. In vollständigen metrischen Räumen gilt auch die Umkehrung der ersten Aussage.

Aufgabe 3
Sei $X = C^0[0,1]$ normiert mit der Supremumsnorm und $k \in C^0([0,1] \times [0,1])$. Berechnen Sie die Norm des Fredholmoperators

$$K : X \to X, f \mapsto Kf = \int_0^1 k(\cdot, t) f(t)\, dt.$$

Aufgabe 4
Sei X wieder der normierte Raum aus der dritten Aufgabe. Zeigen Sie

$$\operatorname{dist}(f, C^\infty[0,1]) = 0 \qquad \text{für alle } f \in X.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 2.11.09, bis 9.15 Uhr.