Aufgabe 1
Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie die Separabilität präkompakter metrischer Räume!

Aufgabe 2
Sei $I = [0, 1]$. Welche Familie ist präkompakt in $C^0(I)$ bezüglich der C^0 Norm $\|f\| = \sup_I |f|$?

1. $f_k(t) = \sin(t + k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ oder
2. $g_l(t) = \sin(lt)$ mit $l \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3
Sei $X = C^0[0, 1]$ und K der Fredholmoperator aus Serie 2. Dann ist

$$\{Kf \ : \ f \in \overline{B_1}(0)\}$$

relativ kompakt in X, d.h. der Abschluss der Menge ist kompakt.

Aufgabe 4
Betrachten sie zwei Banachräume $(X, |\cdot|)$ und $(Y, \|\cdot\|)$ und definieren Sie auf $X \times Y$ die Funktion $|(x, y)| := |x|+\|y\|$. Zeigen Sie nun: Diese Funktion ist eine Norm, die $X\times Y$ zu einem Banachraum macht.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 9.11.09, bis 9.15 Uhr.