Aufgabe 1
Sei X ein Banachraum und $M \subset X$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist beschränkt.
2. $\sup\{Ax : x \in M\} < \infty$ für jedes $A \in X'$.

Aufgabe 2
Betrachten Sie lineare Abbildungen $F, G : X \to X$. Es gelte $F \circ G = FG = \mathrm{id} + GF$. Folgern Sie $FG^m - G^m F = mG^{m-1}$ und widerlegen sie damit die Behauptung $\|F\|, \|G\| < \infty$!

Aufgabe 3
Sei $T_n \in L(X, Y)$ eine Folge von Abbildungen eines Banachraumes in einen normierten Raum, so dass für alle $x \in X$ ein $T(x) \in Y$ mit

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

existiert. Beweisen Sie, dass $T \in L(X, Y)$ mit $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ gilt. Konstruieren Sie außerdem eine Folge mit $\|T\| < \liminf \|T_n\|$!

Aufgabe 4
Konstruieren Sie einen normierten Raum und einen bijektiven Operator $A \in L(X, X)$ dessen Inverse nicht stetig ist!

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, den 16.11.09, bis 9.15 Uhr.