Aufgabe 1
Sei X ein normierter Raum und $X'' = (X')'$ der Bidualraum von X, d. h.

$$X'' = L(X', \mathbb{R}).$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung $J : X \to X''$, $Jx(\varphi) = \varphi(x)$ isometrisch ist.

Aufgabe 2
Sei X ein normierter Raum. Seien A und B disjunkte, konvexe Teilmengen von X, wobei A abgeschlossen sei und B kompakt. Zeigen Sie die Existenz eines Funktionals $\varphi \in X'$, so dass gilt

$$\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x \in B} \varphi(x).$$

Aufgabe 3
Sei X wieder ein normierter Raum und $K \subset X$ eine konvexe Menge. Es gelte $0 \notin \overline{K}$. Zeigen Sie die Existenz eines $\varphi \in X'$ mit den Eigenschaften

$$\|\varphi\| = 1 \text{ und } \varphi(x) \leq -\mathrm{dist}(0, K) \text{ für alle } x \in K!$$

Finden Sie ein Gegenbeispiel, welches belegt, dass die Voraussetzung $0 \notin \overline{K}$ nicht zu $0 \notin K$ abgeschwächt werden darf.

Aufgabe 4
Eine Teilmenge A eines normierten Raumen besitzt die konvexe Hülle

$$Konv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i : \ k \in \mathbb{N},\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} a_i = 1,\ x_i \in A \right\}.$$

Überprüfen Sie folgende Implikationen auf Gültigkeit:

1. $Konv(A)$ ist offen für alle offenen A.
2. $Konv(A)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen A.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 23.11.09, bis 9.15 Uhr.