Aufgabe 1
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Beweisen Sie für alle Randpunkte x von M die Existenz eines Einheitsvektors V, so dass

$$M \subset \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle y - x, V\rangle \leq 0\}.$$

Bemerkung: Man sagt V definiert eine Stützebene für M am Punkt x.

Aufgabe 2
Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Separabilität von X' die Separabilität von X impliziert. Erinnerung: Separabel bedeutet Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge.

Aufgabe 3
Sei X ein normierter Raum. $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sei eine lineare Funktion. Zeigen Sie, dass $\varphi \in X'$ liegt, falls es einen abgeschlossenen Kern besitzt.

Aufgabe 4
Eine Selbstabbildung $A : X \to X$ eines metrischen Raumes heißt kontrahierend, falls es eine Kontraktionskonstante $q \in [0, 1)$ gibt, so dass

$$d(A(x), A(y)) \leq qd(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass jede kontrahierende Selbstabbildung einen eindeutigen Fixpunkt

$$A(x) = x$$

besitzt, falls der metrische Raum vollständig ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 30.11.09, bis 9.15 Uhr.