Aufgabe 1
$|\cdot|, |\cdot|_2$ und $|\cdot|_3$ seien Normen auf X. Es gelte

- (x_k) in $|\cdot|$ beschränkt $\Rightarrow x_l \to x$ bezüglich $|\cdot|_2$ mit einer Teilfolge von (x_k).
- Für eine Konstante $c < \infty$ gilt $|\cdot|_3 \le c|\cdot|_2$.

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C = C(\varepsilon) < \infty$ gibt, so dass

$$|\cdot|_2 \le \varepsilon|\cdot| + C|\cdot|_3.$$

Aufgabe 2
Nehmen Sie an, dass Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ ist und zeigen Sie für alle $c \in \mathbb{R}$ die Gleichung $Du(x) = 0$ für fast alle Punkte in $\{x \in \Omega : u(x) = c\}$.

Aufgabe 3
Sei Ω' ein weiteres Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und Ω und u wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie nun, dass auch $u \circ \phi \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega')$, falls $\phi \in C^1(\Omega', \Omega)$ ein Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie auch die Ableitung $D(u \circ \phi)$!

Aufgabe 4
Welche der folgenden Funktionen liegt auch in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$? Wenn ja, wie lautet ihre schwache Ableitung?

- $$u(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 < t \le 1, \\ 2 & \text{für } 1 < t < 2, \end{cases}$$
  mit $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$.
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ mit Ω und u wie in Aufgabe 2.
- $u^- = -\min\{u, 0\}$ mit Ω und u wie in Aufgabe 2.
- $|u|$ mit Ω und u wie in Aufgabe 2.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 7.12.09, bis 9.15 Uhr.