
Aufgabe 1
Der Satz von Riesz (Vorlesung) besagt, dass die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} T_q : L^q(\mathbb{R}^n) & \to & (L^p(\mathbb{R}^n))' \\ (T_q v)(u) & = & \int uv dx \end{array}$$

surjektiv und isometrisch sind für $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(1) Zeigen Sie:

$$\begin{array}{rcl} (T_q^{-1})' : L^q(\mathbb{R}^n)' & \to & (L^p(\mathbb{R}^n))'' \\ \psi & \to & \psi \circ T_q^{-1} \end{array}$$

ist surjektiv.
(2) Sei

$$\begin{array}{rcl} J : L^p(\mathbb{R}^n) & \to & (L^p(\mathbb{R}^n))'' \\ (Ju)(\varphi) & = & \varphi(u) \end{array}$$

die kanonische Einbettung. Zeigen Sie

$$J = (T_q^{-1})' \circ T_p$$

Also ist $L^p(\mathbb{R}^n)$ reflexiv.

Aufgabe 2
Sei X ein normierter $\mathbb{R}-$Vektorraum. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Eigenschaften:

1. X is *strikt normiert*, d.h. für $x, y \in X$ gilt

$$||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Rightarrow x, y \text{ linear abhängig;}$$

2. Die Einheitskugel $B_1(0) \subset X$ ist strikt konvex, d.h.

$$||x|| = ||y|| = 1, x \neq y \Rightarrow ||\frac{x+y}{2}|| < 1;$$

3. Jede knovexe Teilmenge $K \subset X$ besitzt *höchstens* ein Element minimaler Norm.

Aufgabe 3
Sei μ ein Maßauf X mit $\mu(X) = 1$, und $u : X \to [0, \infty)$ messbar. Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls existent, der Funktion

$$F(p) = (\int_X u^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \to \infty$ und $p \to -\infty$.

Aufgabe 4
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $l^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel ist. Folgern Sie:
$L^\infty(\mu)$ ist separabel $\Leftrightarrow$ dim $L^\infty(\mu) < \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 14.12.09, bis 9.15 Uhr.