Aufgabe 1
Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

(i) F ist unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz:

$$x_k \to x \text{ schwach } \Rightarrow F(x) \leq \liminf_{k\to\infty}(x_k);$$

(ii) F ist koerziv: $\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = \infty$;

(iii) F ist nach unten beschränkt: $m = \inf_{x\in X} F(x) > -\infty$.

Dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $F(x_0) = m$.

Aufgabe 2
Beweisen Sie, dass in $l^1(\mathbb{R})$ schwache und starke Konvergenz übereinstimmen.
Hinweis: Begründen Sie erst, dass es ausreicht, eine starke konvergente Teilfolge zu bestimmen.

Aufgabe 3

Sei X reflexiv und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwache Cauchyfolge, d.h. $(\varphi(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für alle $\varphi \in X'$. Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach konvergiert.

Aufgabe 4
Eine beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergierte genau dann schwach gegen $x \in X$, falls gilt :

$$\lim_{k\in\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x) \text{ für alle } \varphi \in D,$$

mit einer dichten Teilmenge $D \subset X'$.

Aufgabe 5
Untersuchen Sie die Folge $u_k(x) = \sin(kx)$ auf punktweise sowie auf schwache Konvergenz in $L^2((-\pi, \pi))$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 21.12.09, bis 9.15 Uhr.