Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang — 16.4.2018
BSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Sei X_2 vollständig. Sei $X \subset X_1$ dicht. Sei $f\colon X \to X_2$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $g\colon X_1 \to X_2$. g ist gleichmäßig stetig.
b) Belegen Sie mit Beispielen, dass die Voraussetzungen der Gleichmäßigkeit und der Vollständigkeit benötigt werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf der Menge A der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Metrik gegeben ist durch

$$d(A_1, A_2) = \inf\{\rho > 0 : A_1 \subset B_\rho(A_2), A_2 \subset B_\rho(A_1)\}.$$

Dabei ist $B_\rho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < \rho\}$. (Diese heißt Hausdorffmetrik)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(A) Welcher der folgenden Räume ist ein Banachraum?

1. $l^1 = \{\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \|\xi\|_{l^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$
2. $C^0([0, 2])$ mit der L^2 Norm.

(B) Welche der folgenden Mengen ist folgenkompakt in l^1 ?

1. $\{\xi \in l^1 : \|\xi\|_{l^1} \le 1\}$
2. $\{\chi = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 : |z_n| \le |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}\}$ für eine vorgegebene Folge $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$.

Jeweils mit Beweis bzw. Gegenbeispiel!

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 23.4., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.