Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang — 28.5.2018
BSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachten Sie im Banachraum $X = C^0([0,1])$ die Menge M der Funktionen, für die in mindestens einem $x \in [0,1]$ die Ableitung $f'(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass M von erster Kategorie in X ist.

Anleitung:

(a) $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ mit

$$M_k = \left\{ f \in X : \exists x \in [0,1] \text{ mit } \sup_{y \neq x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq k \right\}.$$

(b) M_k ist abgeschlossen in X.

(c) $\operatorname{int} M_k = \emptyset$ (Addition von Zackenfunktionen).

Aufgabe 2 (4 Punkte)
(A) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{GL}(X,Y)$ der invertierbaren linearen Operatoren offen in $L(X,Y)$ ist.
Hinweis. Betrachten Sie erst den Fall $X = Y$ an der Stelle $A = \mathrm{Id}$.

(B) Zeigen Sie, dass $\phi : \mathrm{GL}(X,Y) \to \mathrm{GL}(Y,X)$, $\phi(A) = A^{-1}$, differenzierbar ist mit

$$D\phi(A) \cdot B = -A^{-1} B A^{-1}.$$

Hinweis. Betrachten Sie erst den Fall $X = Y$ an der Stelle $A = \mathrm{Id}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei X Banachraum und seien Y, Z normierte Rume sowie $T : X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung mit den Eigenschaften:
1. $\forall x \in X : T(x,) \in L(Y, R)$, 2. $\forall y \in Y : T(, y) \in L(X, R)$.
Zeige: T ist stetig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
a) Zeige zunächst, dass $C^1([0,1])$ bzgl. der Norm $\|f\| := \|f'\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}$ ein Banachraum ist. Schließe anschließend daraus (mit Korollar 6.1.9) auf die Nichtvollständigkeit des normierten Raumes $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$.
b) Zeige: Die Abbildung $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty}), f \mapsto f'$, ist graphenabgeschlossen, aber nicht stetig.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 3.6. vor der Vorlesung**.