Klausur zur Funktionalanalysis **SS 2014**

Prof. Dr. E. Kuwert 1. August 2014

Beginn der Klausur: 8:30 Uhr **Ende der Klausur: 11:00 Uhr**

Name, Vorname: ....

Nummer der Übungsgruppe: .... Matrikelnummer: ....

Studiengang: .... Semesterzahl: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
erreichbare Punktezahl	4	4	3	2	5	3	21
erreichte Punkte							

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Kennzeichen Sie alle Zettel mit Namen und Nummer der Aufgabe.
- Geben Sie alle Zettel, auch die mit Nebenrechnungen, gemeinsam mit dem vollständig ausgefüllten Deckblatt ab.
- zugelassene Hilfsmittel: Vorlesungsskript (ohne Notizen), Stifte
- Ein Täuschungsversuch kann zum sofortigen Ausschluss und Nichtbestehen der Klausur führen.
- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie Ihre Schritte.
- Es sind insgesamt 6 Aufgaben.
- Insgesamt sind 21 Punkte zu vergeben. Zum Bestehen sind 9 Punkte notwendig.

Aufgabe 1 (4 = 2 + 2 Punkte)
Seien X, Y Banachräume.

(1) Zeigen Sie, dass $\|A\| = \sup_{x \in X,\, \|x\| \leq 1} \|Ax\|$ eine Norm auf $L(X,Y)$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass $L(X,Y)$ ein Banachraum ist.

Lösung. Zu (1): Mit $x = 0$ folgt $\|A\| \geq 0$. Ist $\|A\| = 0$, so folgt für $x \neq 0$

$$Ax = \|x\|\, A\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) = 0.$$

Weiter gilt $\|(\lambda A)x\| = |\lambda|\, \|Ax\|$, also $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$. Und $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$, also $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
Zu (2): Sei A_k Cauchyfolge in $L(X,Y)$. Dann ist die Folge beschränkt, also $\|A_k\| \leq C < \infty$ für alle k. Nun gilt

$$\|A_k x - A_l x\| \leq \|A_k - A_l\|\, \|x\| \to 0 \quad \text{mit } k, l \to \infty.$$

Also existiert $Ax = \lim_{k\to\infty} A_k x$. Es folgt

$$A(\lambda x + \mu y) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x + \mu A_k y) = \lambda Ax + \mu Ay.$$

Weiter $\|Ax\| = \lim_{k\to\infty} \|A_k x\| \leq C\|x\|$. Schließlich gilt für $\|x\| \leq 1$

$$\|(A - A_l)x\| = \lim_{k\to\infty} \|(A_k - A_l)x\| < \varepsilon \quad \text{für } l \geq l(\varepsilon).$$

Aufgabe 2 (4 = 1 + 2 + 1 Punkte)
Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (also 1-periodisch).

(1) Zeigen Sie, das die Folge $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = f(kx)$, eine Teilfolge hat, die schwach in $L^2((0,1))$ konvergiert.

(2) Zeigen Sie für $(a,b) \subset (0,1)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, \chi_{(a,b)}(x)\, dx = (b-a) \int_0^1 f(y)\, dy.$$

(3) Folgern Sie, dass die Folge f_k schwach in $L^2([0,1])$ konvergiert gegen die konstante Funktion mit Wert $[f]_{[0,1]} = \int_0^1 f(y)\, dy$.

Lösung.
(1) Da f beschränkt, ist die Folge f_k in $L^2([0,1])$ beschränkt. Dies ist ein Hilbertraum, also reflexiv. Somit hat f_k eine schwach konvergente Teilfolge in $L^2([0,1])$.

(2) Sei $1 \leq i \leq j \leq k$ mit $a \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})$, $b \in [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k})$, also $|\frac{i}{k} - a| < \frac{1}{k}$, $|\frac{j}{k} - b| < \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned}
\int_{i/k}^{j/k} f(kx)\,dx &= \frac{1}{k}\int_i^j f(y)\,dy \quad \text{(Substitution } kx = y\text{)} \\
&= \frac{j-i}{k}\int_0^1 f(y)\,dy \quad \text{(Periodizität von } f\text{)} \\
&\to (b-a)\int_0^1 f(y)\,dy \qquad \text{mit } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\Big|\int_a^{i/k} f(kx)\,dx\Big| + \Big|\int_b^{j/k} f(kx)\,dx\Big| \leq \frac{C}{k}.$$

Also folgt mit $[f]_{[0,1]} = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f_k(x)\,\chi_{(a,b)}(x)\,dx \to (b-a)\int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1 [f]_{[0,1]}\chi_{(a,b)}(x)\,dx.$$

(3) Daraus folgt weiter

$$\int_0^1 f_k(x)\varphi(x)\,dx \to \int_0^1 [f]_{[0,1]}\varphi(x)\,dx$$

zunächst für alle Riemannschen Treppenfunktionen φ, dann für alle $\varphi \in C^0([0,1])$ durch Approximation und schließlich für alle L^2-Funktionen φ, wieder durch Approximation. Dabei verwendet man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f_k(x)\varphi(x)\,dx - \int_0^1 [f]_{[0,1]}\varphi(x)\,dx\right| \leq \\
&\left|\int_0^1 f_k(x)(\varphi(x) - \varphi_j(x))\,dx\right| + \left|\int_0^1 (f_k(x) - [f]_{[0,1]})\varphi_j(x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 [f]_{[0,1]}(\varphi_j(x) - \varphi(x))\,dx\right|,
\end{aligned}$$

wobei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,1])$ eine approximierende Folge von $\varphi \in L^2$ ist. Die Funktionenfolge f_k ist beschränkt in L^2 (und auch in C^0). Zu $\epsilon > 0$ wähle ein j so dass

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f_k(x)(\varphi(x) - \varphi_j(x))\,dx\right| \leq \|f_k\|_{L^2}\|\varphi - \varphi_j\|_{L^2} \leq C\|\varphi - \varphi_j\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}, \\
&\left|\int_0^1 [f]_{[0,1]}(\varphi_j(x) - \varphi(x))\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Dann gilt wegen obiger Ungleichung (nun ist j fest auf der rechten Seite)

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \int_0^1 f_k(x)\varphi(x)\,dx - \int_0^1 [f]_{[0,1]}\varphi(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Dasselbe Argument greift auch für die Approximation $C^0([0,1])$- Funktionen durch Riemannsche Treppenfunktionen

---

Aufgabe 3 $(3 = 1 + 2$ Punkte)
Sei M Teilmenge eines Banachraums X. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) M ist beschränkt

(2) Für jedes $\phi \in X'$ ist $\sup_{x\in M} \phi(x) < \infty$.

Lösung. Ist M beschränkt und $x \in M$, so folgt $|\phi(x)| \leq \|\phi\|\,\|x\| \leq C\|\phi\|$. Sei nun (2) gegeben. Sei $J : X \to X''$ kanonische Einbettung (isometrisch). Es folgt dann für jedes $\phi \in X'$

$$\sup_{x\in M} Jx(\phi) = \sup_{x\in M} \phi(x) < \infty.$$

Indem wir $-\phi$ betrachten, folgt auch Schranke nach unten, das heißt $\{Jx : x \in M\} \subset X''$ ist punktweise gleichmäßig beschränkt. Nach Banach-Steinhaus ist dann

$$\sup_{x\in M} \|x\| = \sup_{x\in M} \|Jx\| < \infty.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Der Raum $BC^0([0,\infty))$ aller stetigen, beschränkten Funktionen $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ wird mit der Norm $\|u\| = \sup_{x\geq 0} |u(x)|$ versehen. Zeigen Sie: es gibt eine stetige Linearform ϕ auf $BC^0([0,\infty))$ mit

$$\phi(u) = \lim_{x\to\infty} u(x), \quad \text{wann immer dieser Grenzwert existiert.}$$

Lösung. Sei X der Unterraum aller Funktionen u, für die der Grenzwert existiert. Auf X ist $\varphi(u) = \lim_{x\to\infty} u(x)$ wohldefiniert und linear, und es gilt

$$|\varphi(u)| \leq \|u\|.$$

Nach Hahn-Banach hat φ eine stetige, lineare Fortsetzung ϕ.

Aufgabe 5 $(5 = 2 + 2 + 1$ Punkte)
Es sei X Banachraum, und $Y \subset X$ abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie:

(1) Y ist auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz.

(2) Sei $x \in X$ und $y_k, y_0 \in Y$ mit $y_k \to y_0$ schwach in X.
Dann gilt $\|x - y_0\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x - y_k\|$.

(3) Sei X reflexiv. Dann gibt es ein $y_0 \in Y$ mit $\|x - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$.

Lösung. (1): Es konvergiere $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ schwach gegen ein $y_0 \in X$. Wäre $y_0 \notin Y$, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_Y = 0$ und $\phi(y_0) \neq 0$. Aber dann ist

$$0 = \phi(y_k) \to \phi(y_0) \neq 0, \text{ Widerspruch.}$$

(2): Wähle $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x - y_0) = \|x - y_0\|$ (Hahn-Banach, Folgerung 3.1). Dann ist

$$\|x - y_0\| = \phi(x - y_0) = \lim_{k\to\infty} \phi(x - y_k) \leq \liminf_{k\to\infty} \|x - y_k\|.$$

(3): Wähle eine Minimalfolge $y_k \in Y$. Dann ist

$$\|y_k\| \leq \|y_k - x\| + \|x\| \leq C.$$

Da X reflexiv, konvergiert y_k schwach gegen ein $y_0 \in X$. Nach (1) ist $y_0 \in Y$. Nach (2) gilt

$$\|x - y_0\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x - y_k\| = \lim_{k\to\infty} \|x - y_k\| = \operatorname{dist}(x, Y) \leq \|x - y_0\|.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass $W_0^{1,2}(\Omega)$ echte Teilmenge von $W^{1,2}(\Omega)$ ist.
Lösung. Sei $u \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$0 = \int_\Omega \partial_i(u\varphi) = \int_\Omega (\partial_i u)\varphi + \int_\Omega u(\partial_i \varphi).$$

Durch Approximation gilt dies für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Betrachte $u(x) \equiv 1$, also $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Wäre $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so folgt

$$\int_\Omega \partial_i \varphi = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Mit $\varphi(x) = x_i$ ergibt sich ein Widerspruch.

ENDE DER KLAUSUR:
Viel Glück und Erfolg!