Aufgabe 1 (*Fortsetzungsprinzip*)
Seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ eine dichte Teilmenge und Y vollständig. Zeigen Sie: ist $f : A \to Y$ gleichmäßig stetig, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : X \to Y$ mit $\widetilde{f}|_A = f$. Belegen Sie mit Beispielen, dass die Voraussetzungen der Gleichmäßigkeit und der Vollständigkeit benötigt werden.

Aufgabe 2 (L^2-*Norm auf* $C^0([0,1])$)
Sei $I = [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass auf $C^0(I)$ durch

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} u(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm gegeben ist, dass aber $(C^0(I), \|\cdot\|_{L^2})$ kein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (*Hausdorffmetrik*)
Zeigen Sie, dass auf der Menge $\mathcal{A}$ der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Metrik gegeben ist durch

$$d(A_1, A_2) = \inf \{\varrho > 0 : A_1 \subset B_\varrho(A_2),\, A_2 \subset B_\varrho(A_1)\}.$$

Dabei ist $B_\varrho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < \varrho\}$.

Aufgabe 4 (l^p-*Räume*)
Sei $1 \leq p < \infty$. Beweisen Sie, dass

$$l^p = \left\{ x = (x^i)_{i \in \mathbb{N}} : x^i \in \mathbb{R},\, \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

ein Banachraum ist.
Hinweis: Sie brauchen nur die Vollständigkeit zu beweisen und dürfen voraussetzen, dass l^p ein normierter Raum ist.

Abgabe am Dienstag, 2. Mai 2017