Aufgabe 1 (*Zur schwachen Konvergenz*)
Zeigen Sie folgende Eigenschaften der schwachen Konvergenz:

(1) Aus starker Konvergenz folgt schwache beziehungsweise schwach$*$ Konvergenz.

(2) Ist $x_k \to x$ schwach in X und $\phi_k \to \phi$ stark in X', so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.
Ist $\phi_k \to \phi$ schwach$*$ in X' und $x_k \to x$ stark in X, so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(3) Ist $x_k \to x$ schwach in X und $T \in L(X,Y)$, so folgt $Tx_k \to Tx$ schwach in Y.

Aufgabe 2 (*Schwache Konvergenz und nichtlineare Terme I*)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[k,k+\frac{1}{2}]},\ g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[k-\frac{1}{2},k]}.$$

Zeigen Sie, dass die Folgen $f_n, g_n : I = (0,1) \to \mathbb{R}$, mit $f_n(x) = f(nx)$ bzw. $g_n(x) = g(nx)$, sowie $h_n = f_n g_n$, schwach$*$ in $L^\infty(I)$ gegen Funktionen f, g, h konvergieren, dass aber $h \neq fg$ gilt.

Aufgabe 3 (*Schwache Konvergenz und nichtlineare Terme II*)
Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Funktionen

$$f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}}.$$

Bestätigen Sie $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\pi}$, und untersuchen Sie f_ε sowie f_ε^2 für $\varepsilon \searrow 0$ auf schwache Konvergenz.

Aufgabe 4 (*Separabilität*)
Sei $\mu = \mathcal{L}^n$ (oder allgemeiner μ Radonmaß auf einem σ-kompakten metrischen Raum). Zeigen Sie, dass $L^p(\mu)$ separabel ist für $1 \leq p < \infty$.

Abgabe am Dienstag, 11. Juli, in der Vorlesung.