Aufgabe 1 (*Kompakte Einbettungen*)
Seien $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ stetige Inklusionen von Banachräumen, $X_1 \subset X_2$ sei kompakt. Zeigen Sie durch Widerspruch: zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C(\varepsilon) < \infty$ mit

$$\|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + C(\varepsilon)\|x\|_3 \quad \text{für alle } x \in X_1.$$

Aufgabe 2 (*Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren I*)
Betrachten Sie für $k \in L^2(I \times I)$, $I = (0,1)$, den Operator $K\colon L^2(I) \to L^2(I)$ mit $Kf(x) = \int_I k(x,y) f(y)\, dy$. Beweisen Sie:

(a) K ist wohldefiniert und stetig mit $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(I \times I)}$.

(b) Der Operator K^* (Hilbertraum-Adjungierte) hat eine entsprechende Integraldarstellung, und zwar mit $k^*(x,y) = k(y,x)$.

(c) K ist ein kompakter Operator (verwenden Sie, dass Linearkombinationen von Produktfunktionen $w(x,y) = u(x)v(y)$ dicht in $L^2(I \times I)$ sind, sowie Aufgabe 5).

Aufgabe 3 (*Zur Reflexivität*)
Beweisen Sie, dass die Räume $\ell^1(\mathbb{R})$ und $\ell^\infty(\mathbb{R})$ nicht reflexiv sind.

Aufgabe 4 (*Gegenbeispiel zur schwach∗ Folgenkompaktheit*)
Betrachten Sie in $L^\infty(I)'$, $I = (0,1)$, die Funktionale

$$\phi_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f \, d\mathcal{L}^1.$$

Zeigen Sie: zu jeder Folge $\varepsilon_k \to 0$ gibt es ein $f \in L^\infty(I)$, so dass $\phi_{\varepsilon_k}(f)$ nicht konvergiert. Also hat ϕ_{ε_k} keine schwach∗ konvergente Teilfolge.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)
Beweisen Sie: Seien X, Y Banachräume, dann ist die Menge $K(X,Y)$ der kompakten Operatoren abgeschlossen in $L(X,Y)$.

Abgabe am Dienstag, 18. Juli, in der Vorlesung.