
Aufgabe 1 (*endlichdimensionale Unterräume*)
Sei V endlichdimensionaler Unterraum eines Banachraums X. Zeigen Sie, dass V abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 2 (*dichter Unterraum*)
Sei $X = (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ mit Unterraum $V = C^\infty([0,1])$. Zeigen Sie

$$\operatorname{dist}(u, V) = \inf_{v \in V} \|u - v\|_\infty = 0 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Aufgabe 3 (*Norm von Fredholmoperatoren*)
Für $I = [0,1]$ sei $K : (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)}) \to (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)})$ gegeben durch

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy, \qquad \text{wobei } k \in C^0(I \times I).$$

Berechnen Sie die Operatornorm von K.

Aufgabe 4 (*Kartesisches Produkt von Banachräumen*)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, und

$$\|\cdot\|_{X\times Y} : X \times Y \to \mathbb{R}, \ \|(x,y)\|_{X\times Y} = \max\left(\|x\|_X, \|y\|_Y\right).$$

Zeigen Sie:

(1) $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist ein normierter Raum.

(2) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, so auch $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$.

Was ändert sich für eine beliebige Norm $\|(a,b)\|$ statt $\max(a,b)$?

Abgabe am Dienstag, 9. Mai 2017