
Aufgabe 1 (*Beispiele zur Kompaktheit*)
Sei $I = [0,1]$. Welche der folgenden Familien ist präkompakt in $C^0(I)$ bezüglich der C^0-Norm $\|f\| = \sup_I |f|$?

(a) $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $f_k(t) = \sin(t+k)$,

(b) $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $g_k(t) = \sin(kt)$.

Aufgabe 2 (*Hausdorffabstand, Teil II*)
Sei $\mathcal{A}$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Metrik (vgl. Serie 1, Aufgabe 3)

$$d(A_1, A_2) = \inf\{\varrho > 0 : A_1 \subset B_\varrho(A_2),\, A_2 \subset B_\varrho(A_1)\},$$

wobei $B_\varrho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, A) < \varrho\}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{A \in \mathcal{A} : A \subset \overline{B_R(0)}\}$$

kompakt ist.
Hinweis: Arzela-Ascoli für $f_A : \overline{B_R(0)} \to [0,\infty)$, $f_A(x) = \mathrm{dist}(x, A)$.

Aufgabe 3 (*zur Hölderstetigkeit*)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ wobei $0 < \alpha \leq 1$. Zeigen Sie, dass f Hölderstetig ist genau für die Exponenten $0 < \gamma \leq \alpha$.

Aufgabe 4 (*Kompaktkeit und Fredholmoperator*)
Sei $X = C^0([0,1])$ und K der Operator von Blatt 2, Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{K} = \{Kf : f \in \overline{B_1(0)}\}$$

relativ kompakt in X ist (d.h. der Abschluss der Menge ist kompakt in X).

Abgabe am Dienstag, 16. Mai 2017