Aufgabe 1 (*Ehrling-Lemma*)
Betrachten Sie auf einem Vektorraum X drei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_3$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jede $\|\cdot\|_1$-beschränkte Folge in X hat eine Teilfolge, die bzgl. $\|\cdot\|_2$ konvergiert.

(2) Es gibt ein $\Lambda < \infty$ mit $\|x\|_3 \leq \Lambda \, \|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Zeigen Sie indirekt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon < \infty$, so dass gilt:

$$\|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + C_\varepsilon \|x\|_3 \text{ für alle } x \in X.$$

Aufgabe 2 (*zum Satz von Hahn-Banach I*)
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge A eines normierten Raums X genau dann beschränkt ist, wenn $\sup_{x \in A} \phi(x) < \infty$ für jedes Funktional $\phi \in X'$.

Aufgabe 3 (*zum Satz von Hahn-Banach II*)
Sei $\ell^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten, reellen Folgen $\mathbf{x} = (x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x^i|$. Finden Sie ein Funktional $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{R})'$ mit $\|\phi\| = 1$ und folgenden weiteren Eigenschaften:

(1) $\phi(\mathbf{x}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^i$, falls dieser Grenzwert existiert,

(2) $\liminf_{i \to \infty} x^i \leq \phi(x) \leq \limsup_{i \to \infty} x^i$,

(3) $\phi((x^1, x^2, x^3, \ldots)) = \phi((x^2, x^3, \ldots))$.

Aufgabe 4 (endlichdimensionales Komplement)
Sei V abgeschlossener Unterraum des normierten Raums X, mit Kodimension $\dim X/V = d < \infty$. Bestimmen Sie ein Komplement W, also $X = V \oplus W$. Geben Sie einen Isomorphismus

$$\phi : (V \times W, \|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|) \to (X, \|\cdot\|),$$

also ϕ, ϕ^{-1} stetig.

Abgabe am Dienstag, 23. Mai 2017