

Aufgabe 1 (*Invertierbarkeit von Operatoren*)

Konstruieren Sie einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und eine bijektive Abbildung $F \in L(X, X)$, für die F^{-1} nicht in $L(X, X)$ liegt.

Aufgabe 2 (*Menge der invertierbaren Operatoren*)

Zeigen Sie, dass die Menge $GL(X, Y)$ der invertierbaren linearen Operatoren offen in $L(X, Y)$ ist.

Hinweis. Betrachten Sie erst den Fall $X = Y$ an der Stelle $A = \text{Id}$.

Aufgabe 3 (*Differenzierbarkeit der Inversen*)

Zeigen Sie, dass $\phi : GL(X, Y) \rightarrow GL(Y, X)$, $\phi(A) = A^{-1}$, differenzierbar ist mit

$$D\phi(A) \cdot B = -A^{-1}BA^{-1}.$$

Hinweis. Betrachten Sie erst den Fall $X = Y$ an der Stelle $A = \text{Id}$.

Aufgabe 4 (*Nirgends differenzierbare Funktionen*)

Betrachten Sie im Banachraum $X = C^0([0, 1])$ die Menge M der Funktionen, für die in mindestens einem $x \in [0, 1]$ die Ableitung $f'(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass M von erster Kategorie in X ist.

Anleitung:

(a) $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ mit

$$M_k = \left\{ f \in X : \exists x \in [0, 1] \text{ mit } \sup_{y \neq x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq k \right\}.$$

(b) M_k ist abgeschlossen in X .

(c) $\text{int } M_k = \emptyset$ (Addition von Zackenfunktionen).

Abgabe am Dienstag, 30. Mai 2017