
Aufgabe 1 (*Stetigkeit von Bilinearformen*)
Seien X, Y Banachräume und $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Für feste $x \in X$ bzw. $y \in Y$ seien die Abbildungen $B(x, \cdot)$ bzw. $B(\cdot, y)$ stetig. Zeigen Sie, dass B bezüglich der Norm $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ stetig ist.

Anleitung : Betrachten Sie für $\|y\| = 1$ die Familie $\beta_y : X \to \mathbb{R}$, $\beta_y(x) = B(x, y)$.

Aufgabe 2 (*Beispiele zur Existenz schwacher Ableitungen*)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion $\chi_{\mathbb{R}^+}$ liegt nicht in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(b) Die Funktion $f(x) = |x|$ liegt in $W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, aber nicht in $W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(c) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}$. Geben Sie eine Definition für den Begriff $f' = \mu$ schwach und zeigen Sie $\chi'_{\mathbb{R}^+} = \delta_0$ (Diracmaß).

Aufgabe 3 (*Hilbertraum-Adjungierte*)
Berechnen Sie die Hilbertraum-Adjungierte des Ableitungsoperators

$$D : W^{1,2}_0(\Omega) \to L^2(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 4 (*Projektionssatz*)
Sei A eine abgeschlossene, konvexe Teilenge eines Hilbertraums X. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau einen Punkt $P(x) \in A$ mit

$$\|x - P(x)\| = \text{dist}\,(x, A).$$

Zeigen Sie das direkt, und folgern Sie den Projektionssatz.

Abgabe am Mittwoch, 13. Juni 2017