
Aufgabe 1 (*Differenzierbarkeit von Bilinearformen*)
Seien X, Y, Z Banachräume und $B\colon X \times Y \to Z$ eine stetige, bilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass B unendlich oft differenzierbar ist, genauer

$$\begin{aligned} DB(x,y)\cdot(\xi,\eta) &= B(x,\eta) + B(\xi,y), \\ D^2B(x,y)((\xi,\eta),(\xi',\eta')) &= B(\xi,\eta') + B(\xi',\eta), \\ D^3B(x,y) &= 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in X \times Y. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*Dualraum von $W_0^{1,2}(\Omega)$*)
Sei $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie die Abbildungen $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to X$, $Ju = (u, Du)$, sowie $P\colon X \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $P(f,F)(u) = \int_\Omega (fu + \langle F, Du\rangle)$. Die Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ sei so gewählt, dass J isometrisch einbettet. Zeigen Sie:

(1) $X = \ker P \oplus \operatorname{Bild} J$ (orthogonale Summe von abgeschlossenen Unterräumen)

(2) P ist surjektiv und für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ gilt $\|\varphi\| = \inf\{\|(f,F)\|_{L^2} : P(f,F) = \varphi\}$.

Aufgabe 3 (*kanonische Einbettung*)
Betrachten Sie für einen Banachraum X die Abbildung

$$J : X \to X'' = (X')',\ (Jx)(\phi) = \phi(x).$$

Zeigen Sie, dass J isometrisch abbildet, also $\|Jx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$.
Hinweis. Satz von Hahn-Banach bzw. Folgerung 3.1.

Aufgabe 4 (*schwaches Neumannproblem*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und äußerer Normale ν. Betrachten Sie für $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ den schwach definierten Operator

$$L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)',\ Lu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u),$$

wobei a symmetrisch und elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Zeigen Sie: für $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $a^{\alpha\beta} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $f \in C^0(\overline{\Omega})$ ist die Gleichung $Lu = f$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (\partial_\alpha u)\, a^{\alpha\beta}\nu_\beta &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,2}(\Omega)$ dicht liegt.

Abgabe am Dienstag, 20. Juni 2017