Aufgabe 1 ($W_0^{1,2}(\Omega) \overset{\neq}{\subset} W^{1,2}(\Omega)$)
Sei Ω ein beschränktes offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht ist in $W^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 2 (*Schwache Ableitung von $u^\pm$ und $|u|$*)
Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, und $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u^+ = \max(u,0)$, $u^- = -\min(u,0)$ und $|u|$ ebenfalls in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sind, und geben Sie die schwachen Ableitungen an.

Aufgabe 3 (*Niveaumengen von Sobolevfunktionen*)
Sei Ω ein offenes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, und $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeigen Sie dass für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$Du(x) = 0 \quad \text{für fast alle } x \in N_c = \{x \in \Omega : u(x) = c\}.$$

Aufgabe 4 (*Heisenberg Unschärferelation*)
In der Quantenmechanik werden Messgrößen (Observable) als lineare Operatoren A mit $A^* = A$ in einem komplexen Hilbertraum H aufgefasst. Die Elemente $\psi \in H$ mit $\|\psi\| = 1$ stellen Zustände eines Teilchens dar, und man setzt für jedes ψ

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle A\psi, \psi \rangle & &\text{(Erwartungswert)}, \\ \Delta A &= \|(A - \langle A \rangle \mathrm{Id})\psi\| & &\text{(Unschärfe)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die Heisenberg Unschärferelation

$$(\Delta A) \cdot (\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A,B] \rangle|, \quad \text{wobei } [A,B] = AB - BA.$$

Abgabe am Dienstag, 27. Juni 2017