Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis — WS 04/05, Serie 9

Prof. Dr. Ernst Kuwert, Dr. Julian Scheuer — 26. Juni 2017

Aufgabe 1 (*Nicht-Separabilität*)
Sei μ äußeres Maß auf X. Zeigen Sie

$$L^\infty(\mu) \text{ separabel} \quad \Leftrightarrow \quad \dim L^\infty(\mu) < \infty.$$

Hinweis. Laut Vorlesung ist der Folgenraum $\ell^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel.

Aufgabe 2 (*Dualräume*)
Bestimmen Sie die Dualräume:

(a) $\ell_0^\infty(\mathbb{R}) = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{i\to\infty} x^i = 0\}$.

(b) $\ell_*^\infty(\mathbb{R}) = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{i\to\infty} x^i \text{ existiert}\}$.

Aufgabe 3 (*Grenzwerte der L^p-Normen*)
Sei μ ein Maß äußeres Mass mit $\mu(X) = 1$, und $u : X \to [0,\infty)$ sei μ-messbar. Bestimmen Sie für $p \to \pm\infty$ die Grenzwerte, falls existent, der Funktion

$$\phi(p) = \Big(\int_X u^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Aufgabe 4 (*Strikte Konvexität*)
Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) $B_1(0) \subset X$ ist strikt konvex:

$$\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

(b) In jeder Menge $K \subset X$ konvex gibt es *höchstens* einen Punkt kleinster Norm.

(c) X ist strikt normiert, das heißt

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Rightarrow \quad x, y \text{ sind linear abhängig.}$$

Abgabe am Dienstag, 4. Juli, in der Vorlesung.