Funktionalanalysis (Sommersemester 2017)

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Thema dieser Vorlesung ist die Lineare Funktionalanalysis. Generell geht es dabei um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Gleichungen

$$Lx = y,$$

das heißt $L : X \to Y$ ist eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen:

$$L(\lambda x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Lx_1 + \lambda_2 Lx_2 \quad \text{für alle } x_{1,2} \in X,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}.$$

Für endlichdimensionale Vektorräume ist dieses Problem in der Linearen Algebra vollständig behandelt worden; das Interesse gilt nun dem Fall $\dim X = \infty$. In diesem Zusammenhang nennt man L auch einen linearen Operator. Ein wichtiges Beispiel ist das Dirichletproblem für die Poissongleichung auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Setze $X = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y = C^0(\Omega)$. Dann ist das Dirichletproblem gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung $Lu = f$ für $L = -\Delta : X \to Y$. Die folgenden Beispiel zeigen, dass die Lösungsmethoden der Linearen Algebra nicht oder jedenfalls nicht unmittelbar anwendbar sind.

Beispiel 0.1 Betrachte den Raum

$$X = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation $(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})_i = \lambda x_i + \mu y_i$. Definiere die linearen Abbildungen, genauer Endomorphismen,

$$\begin{aligned} A : X \to X, &\qquad A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \\ B : X \to X, &\qquad B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots). \end{aligned}$$

A ist injektiv, aber nicht surjektiv; B ist surjektiv, aber nicht injektiv. Im Endlichdimensionalen wäre das nicht möglich.

Beispiel 0.2 Betrachte auf dem Raum $X = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ die lineare Abbildung

$$L : X \to X,\ (Lu)(t) = (\sin t)\, u(t).$$

Angenommen, L hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Funktion $u \in X$, nicht die Nullfunktion, mit $Lu = \lambda u$ bzw.

$$(\sin t)\, u(t) = \lambda u(t) \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Es folgt $\{t \in [-\pi, \pi] : u(t) \neq 0\} \subset \{t : \sin t = \lambda\}$. Die rechte Menge ist aber endlich, somit ist u identisch Null, Widerspruch.

Auch zentrale Aussagen der Analysis lassen sich nicht einfach in unendlichdimensionale Räume übertragen.

Beispiel 0.3 Betrachte den Raum

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R},\, \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Nun gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{x}^k\|_\infty = 1 \quad \text{für } \mathbf{x}^k = (0,\ldots,0,\overset{k}{1},0,\ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{R})..$$

Aber $\mathbf{x}^k$ hat keine konvergente Teilfolge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, denn $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l\|_\infty = 1$ für $k \neq l$.

Grundsätzlich müssen zu den Methoden der Linearen Algebra geeignete topologische Konzepte hinzukommen, um unendlichdimensionale Probleme zu behandeln. Im $\mathbb{R}^n$ führt jede Norm auf die gleiche Topologie, wie wir jetzt zeigen.

Satz 0.1 (Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$) *Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent: zu $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ gibt es $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ mit*

$$\lambda\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \Lambda\,\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Insbesondere führen alle Normen zur gleichen Topologie bzw. Konvergenzbegriff.

Beweis: Wir können $X = \mathbb{R}^n$ annehmen, denn sonst wählen wir eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ und betrachten auf $\mathbb{R}^n$ die Normen $\|x\|_{1,2} = \|\varphi(x)\|_{1,2}$ mit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Weiter reicht es zu zeigen, dass eine gegebene Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist. Nun gilt

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{=:\Lambda}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$, erfüllt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \leq \Lambda\,\|x - y\|_\infty,$$

d.h. f ist Lipschitzstetig mit Konstante Λ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Setze

$$\lambda = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n,\, \|x\|_\infty = 1\}.$$

Die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$ ist abgeschlossen und beschränkt. Da f stetig, wird das Infimum angenommen und es folgt $\lambda > 0$. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\|x\| = \Big\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\Big\|\,\|x\|_\infty \geq \lambda\,\|x\|_\infty.$$

$\square$

Zur Ergänzung sei bemerkt, dass zwei *Metriken* auf $\mathbb{R}^n$ nicht notwendig dieselbe Topologie liefern. Ein triviales Beispiel ist die diskrete Metrik $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$, bezüglich der alle Mengen offen sind. Für die Euklidische Metrik ist das natäurlich nicht der Fall. Wichtiger ist hier allerdings die Tatsache, dass die Äquivalenz der Normen auf unendlichdimensionalen Räumen nicht notwendig gilt.

Beispiel 0.4 Auf $X = C^0(I)$, $I = [0,1]$, haben wir die beiden Normen(!)

$$\|u\|_{C^0(I)} = \max_{x \in I} |u(x)| \quad \text{und} \quad \|u\|_{L^2(I)} = \Big(\int_0^1 u(x)^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Die Standardabschätzung liefert $\|u\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{C^0(I)}$, die Normen sind aber nicht äquivalent. Betrachte die Folge

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann $\|u_n\|_{C^0(I)} = 1$ und $\|u_n\|_{L^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$ mit $n \to \infty$.

1 Metrische und normierte Räume

Definition 1.1 *Sei X eine Menge. Dann heißt $d : X \times X \to [0,\infty)$ Metrik und (X,d) metrischer Raum, falls Folgendes gilt:*

(1) *$d(x,y) = 0$ genau wenn $x = y$ (Positivität),*

(2) *$d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$ (Symmetrie),*

(3) *$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung).*

Definition 1.2 *$U \subset (X,d)$ heißt offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset U$, wobei $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.*

Beispiel 1.1 $B_r(x)$ ist offen, denn für $y \in B_r(x)$ gilt $B_\varrho(y) \subset B_r(x)$ mit $\varrho = r - d(x,y) > 0$. Für $z \in B_\varrho(y)$ liefert nämlich die Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r.$$

Lemma 1.1 (Topologie auf metrischen Räumen) *Sei (X,d) metrischer Raum.*

(1) *Ist U_λ, $\lambda \in \Lambda$, Familie von offenen Mengen in X, so ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ offen.*

(2) *Ist U_i, $i \in I$, endliche Familie von offenen Mengen in X, so ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen.*

(3) *Zu $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt es offene U_1, U_2 mit $x_i \in U_i$ für $i = 1,2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Bemerkungen. Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heißt Topologie, wenn $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten, und außerdem $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ gilt. Die Mengen in $\mathcal{T}$ nennt man dann offen, ihre Komplemente abgeschlossen. Jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ heißt (offene) Umgebung von x. Eine Folge $x_k \in X$ konvergiert gegen x bezüglich $\mathcal{T}$, falls jede Umgebung von X alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn die Eigenschaft (3) aus dem Lemma erfüllt ist, heißt die Topologie Hausdorffsch und $(X,\mathcal{T})$ Hausdorffraum.[1]

[1] Felix Hausdorff, 1868-1942

Für Mengen $A \subset (X,d)$ sind folgende weitere Bezeichnungen üblich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{int} A &= \{x \in X : \text{ es gibt ein } r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset A\},\\
\overline{A} &= \{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } r > 0\},\\
\partial A &= \overline{A} \backslash \operatorname{int} A,\\
\operatorname{diam} A &= \sup_{x,y \in A} d(x,y).
\end{aligned}$$

Eine Menge A heißt beschränkt, falls $\operatorname{diam} A < \infty$. Weiter heißt eine Folge x_k in (X,d)

$$\begin{aligned}
\text{konvergent} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } \lim_{k\to\infty} d(x_k,x) = 0,\\
\text{Cauchyfolge} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } K \in \mathbb{N} \text{ mit } d(x_k,x_l) < \varepsilon \text{ für alle } k,l > K.
\end{aligned}$$

Definition 1.3 (Vollständigkeit) *Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.*

Satz 1.1 (Vervollständigung nach Cantor) [2] *Zu jedem metrischen Raum (X,d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ und eine isometrische (abstandstreue) Abbildung*

$$J : (X,d) \to (\hat{X},\hat{d}) \qquad \textit{mit } J(X) \textit{ dicht in } \hat{X}.$$

Eindeutigkeit: ist $(\tilde{X},\tilde{d})$ vollständig und $\tilde{J} : X \to \tilde{X}$ isometrisch mit $\tilde{J}(X)$ dicht in $\tilde{X}$, so gibt es genau eine Isometrie (abstandstreue Bijektion) $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\tilde{J} = \Phi \circ J$.

$$\begin{tikzcd}
& (X,d) \arrow[dl, "J"'] \arrow[dr, "\tilde{J}"] & \\
(\hat{X},\hat{d}) \arrow[rr, "\Phi"] & & (\tilde{X},\tilde{d})
\end{tikzcd}$$

Beweis: Zur Konstruktion definieren wir $\hat{X} = \mathrm{CF}(X)/\sim$, wobei

$$\begin{aligned}
\mathrm{CF}(X) \quad &= \quad \{\mathbf{x} = (x^i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbf{x} \text{ ist Cauchyfolge in } X\},\\
\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} d(x^i,y^i) = 0.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert, denn für i,j hinreichend groß ist $d(x^i,x^j), d(y^i,y^j) < \frac{\varepsilon}{2}$, also folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(x^i,y^i) \le d(x^i,x^j) + d(x^j,y^j) + d(y^j,y^i) < d(x^j,y^j) + \varepsilon,$$

bzw. aus Symmetriegründen $|d(x^i,y^i) - d(x^j,y^j)| < \varepsilon$, das heißt $d(x^i,y^i)$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Ist $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x^{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so definieren beide dasselbe Element von $\hat{X}$, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, x^{i_k}) = 0.$$

Wir machen $\hat{X}$ zu einem metrischen Raum durch

$$\hat{d}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = \lim_{i\to\infty} d(x^i,y^i).$$

[2] Georg Cantor, 1845-1918

Der Grenzwert hängt nicht von der Wahl der repräsentierenden Folgen ab. Die Eigenschaften einer Metrik sind leicht nachzuprüfen, insbesondere

$$\hat{d}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} d(x^i,y^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{x}] = [\mathbf{y}].$$

Definiere weiter

$$J : X \to \hat{X},\ J(x) = [(x,x,\ldots)].$$

Es gilt $\hat{d}(J(x),J(y)) = d(x,y)$, also ist J isometrisch. Für $[\mathbf{x}] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}],J(x^k)) = \lim_{i\to\infty} d(x^i,x^k) < \varepsilon \quad \text{für } k \text{ hinreichend groß.}$$

Also ist $J(X)$ dicht in $\hat{X}$. Wir zeigen nun dass $(\hat{X},\hat{d})$ vollständig ist. Sei $[\mathbf{x}_k]$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$, das heißt

$$\lim_{i\to\infty} d(x^i_k,x^i_l) < \varepsilon \quad \text{für } k,l \geq k(\varepsilon). \tag{1.1}$$

Durch Weglassen von endlich vielen Gliedern in jeder Folge $\mathbf{x}_k$ können wir annehmen, dass

$$d(x^i_k,x^j_k) < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } i,j \in \mathbb{N}.$$

Jetzt betrachte die Diagonalfolge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$, also $y^k = x^k_k$. Für $k,l \geq k(\varepsilon)$ gilt

$$d(y^k,y^l) \leq d(x^k_k,x^i_k) + d(x^i_k,x^i_l) + d(x^i_l,x^l_l) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{l}.$$

Somit ist $\mathbf{y}$ eine Cauchyfolge. Wir zeigen, dass $[\mathbf{x}_k]$ gegen $[\mathbf{y}]$ konvergiert, und zwar ist

$$\begin{aligned} d(x^i_k,y^i) &\leq d(x^i_k,x^j_k) + d(x^j_k,x^j_i) + d(x^j_i,x^i_i) \\ &< \frac{1}{k} + d(x^j_k,x^j_i) + \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Mit $j \to \infty$ folgt $d(x^i_k,y^i) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{i}$ für $i,k \geq k(\varepsilon)$ nach (1.1), also gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}_k],[\mathbf{y}]) = \lim_{i\to\infty} d(x^i_k,y^i) \leq \frac{1}{k} + \varepsilon \quad \text{für } k \geq k(\varepsilon),$$

das heißt $\hat{d}([\mathbf{x}_k],[\mathbf{y}]) \to 0$ mit $k \to \infty$ wie behauptet. Damit ist die Konstruktion von $(\hat{X},\hat{d})$ fertig; wir kommen zur Eindeutigkeit. Die Abbildung $J : X \to \hat{X}$ ist isometrisch und insbesondere injektiv. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi : J(X) \to \tilde{X},\ \Phi(J(x)) = \tilde{J}(x),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{d}\big(\Phi(J(x)),\Phi(J(y))\big) &= \tilde{d}\big(\tilde{J}(x),\tilde{J}(y)\big) \\ &= d(x,y) \quad (\text{da } \tilde{J} \text{ isometrisch}) \\ &= \hat{d}(J(x),J(y)) \quad (\text{da } J \text{ isometrisch}). \end{aligned}$$

Somit ist Φ auf $J(X)$ isometrisch, insbesondere gleichmäßig stetig. Da $J(X)$ dicht in $\hat{X}$ und $\tilde{X}$ vollständig, existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ (Serie 1, Aufgabe 1), und Φ ist isometrisch. Wegen $\Phi(J(X)) = \tilde{J}(X)$ ist $\Phi(\hat{X})$ dicht in $\tilde{X}$, und außerdem vollständig bezüglich $\tilde{g}$. Somit ist $\Phi(\hat{X})$ abgeschlossen (Serie 1, Aufgabe 2) und $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ ist surjektiv, also eine Isometrie. □

Beispiel 1.2 Im Beweis wurden die reellen Zahlen als bekannt vorausgesetzt. Cantor hat das Verfahren benutzt, um $\mathbb{R}$ als Quotient $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})/\sim$ zu konstruieren, dies erfordert nur geringfügige Änderungen.

Der folgende Begriff dürfte wohlbekannt sein, er wurde in der Einleitung schon benutzt.

Definition 1.4 (Norm) *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Eine Funktion $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ heißt Norm, falls gilt:*

(1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ *(Positivität),*

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *für alle* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *(Halblinearität),*

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Wir haben dann auf X die induzierte Metrik $d(x,y) = \|x - y\|$. Ist X mit dieser Metrik vollständig, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum.[3]

Ein normierter Raum ist stets ein Vektorraum, während ein metrischer Raum auf irgendeiner Menge gegeben sein kann.

Beispiel 1.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Für $\mathcal{L}^n$-messbare $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sei

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^n\big(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}\big) = 0.$$

Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mathcal{L}^n\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\big\{s > 0 : \mathcal{L}^n\big(\{|f| > s\}\big) = 0\big\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Damit kann der Raum der L^p-Funktionen wie folgt definiert werden:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar} : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}/\sim .$$

Nach dem Satz von Fischer-Riesz ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ein Banachraum. Nun haben wir die offensichtliche isometrische Abbildung

$$J : (C^0_c(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}) \to (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}).$$

Man beachte, dass $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ auf $C^0_c(\Omega)$ tatsächlich eine Norm ist. $C^0_c(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ im Fall $p < \infty$ (siehe Skript Kuwert Analysis 3, Satz 6.10). Für $p < \infty$ können wir $L^p(\Omega)$ als (konkrete Realisierung der) Vervollständigung von $(C^0_c(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ansehen.

Die Konstruktion als Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q}$-Cauchyfolgen beweist die Existenz der reellen Zahlen, man greift aber in der Analysis nie auf sie zurück, weil die Charakterisierung durch Axiome einfacher und effizienter ist. Auch im Fall der Vervollständigung eines metrischen Raums ist es ebenfalls günstig, eine möglichst konkrete Realiserung zu haben. Zum Beispiel ist es wünschenswert, die Elemente von $L^p(\Omega)$ durch (fast überall definierte) Funktionen zu beschreiben, und nicht nur als Äquivalenzklassen von L^p-Cauchyfolgen in $C^0_c(\Omega)$. Genau das leistet der Satz von Fischer-Riesz.

[3] Stefan Banach, 1892-1945

Definition 1.5 *Seien* $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ *normierte Räume. Eine lineare Abbildung* $A : X \to Y$ *heißt beschränkt, falls gilt:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

Die Zahl $\|A\|$ *heißt Operatornorm von* A*. Der Raum*

$$L(X, Y) = \{A : X \to Y : A \text{ linear}, \|A\| < \infty\}$$

ist mit $\|\cdot\|$ *ein normierter Raum.*

Lemma 1.2 (Stetigkeitskriterien für lineare Abbildungen) *Für eine lineare Abbildung* $A : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist beschränkt.*

(2) *A ist stetige Abbildung.*

(3) *A ist stetig im Punkt* $0 \in X$*.*

Beweis: Aus (1) folgt

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \, \|x - y\|,$$

das heißt die Abbildung ist sogar Lipschitzstetig mit Konstante $\|A\|$. Sei umgekehrt A stetig in $0 \in X$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|Ax\| = \|A(x) - A(0)\| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } \quad \|x\| = \|x - 0\| \leq \delta.$$

Für $x \neq 0$ folgt daraus die Abschätzung

$$\|Ax\| = \frac{\|x\|}{\delta} \underbrace{\left\|A\Big(\delta \frac{x}{\|x\|}\Big)\right\|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

□

Satz 1.2 (Vollständigkeit von $L(X, Y)$) *Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $L(X, Y)$, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum.*

Beweis: Sei A_i Cauchyfolge in $L(X, Y)$, also

$$\|A_i x - A_j x\| \leq \|A_i - A_j\| \, \|x\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{für } i, j \geq I(\varepsilon).$$

Somit ist $A_i x$ Cauchyfolge, und $Ax := \lim_{i \to \infty} A_i x$ existiert. Es ist klar dass A linear ist, weiter gilt

$$\big|\|A_i\| - \|A_j\|\big| \leq \|A_i - A_j\| < \varepsilon \quad \text{für } i, j \geq I(\varepsilon).$$

Also existiert $\Lambda := \lim_{i \to \infty} \|A_i\|$, und es folgt

$$\|Ax\| = \lim_{i \to \infty} \|A_i x\| \leq \Lambda \|x\|,$$

das heißt $A \in L(X, Y)$. Schließlich haben wir

$$\|Ax - A_j x\| = \lim_{i \to \infty} \|A_i x - A_j x\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{für } j \geq I(\varepsilon),$$

also $\|A - A_j\| < \varepsilon$ für $j \geq I(\varepsilon)$. □

Definition 1.6 (Dualraum) *Sei X ein normierter Raum. Dann heißt der Banachraum $X' = L(X, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), versehen mit der Operatornorm, Dualraum von X.*

Satz 1.3 (Quotientenräume) *Sei X ein Banachraum und V ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird der Quotient X/V ein Banachraum mit der Norm*

$$\|[x]\| = \inf_{v \in V} \|x + v\|.$$

Die Projektion $p : X \to X/V$ ist offen und hat Operatornorm $\|p\| = 1$ (außer wenn $V = X$).

Beweis: Wir beginnen mit den Normeigenschaften. Ist $\|[x]\| = 0$, so gibt es $v_k \in V$ mit $\|x + v_k\| \to 0$, also $v_k \to -x$. Da V abgeschlossen, folgt $x \in V$ bzw. $[x] = 0$. Weiter gilt für $\lambda \neq 0$ (der Fall $\lambda = 0$ ist klar)

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{v \in V} \|\lambda x + v\| = |\lambda| \inf_{v \in V} \|x + \frac{1}{\lambda} v\| = |\lambda| \, \|[x]\|.$$

Für die Dreiecksungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned}
\|[x_1] + [x_2]\| &= \|[x_1 + x_2]\| \\
&= \inf_{v_1, v_2 \in V} \|x_1 + x_2 + v_1 + v_2\| \\
&\leq \inf_{v_1, v_2 \in V} \big(\|x_1 + v_1\| + \|x_2 + v_2\|\big) \\
&= \|[x_1]\| + \|[x_2]\|.
\end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, dass X/V mit dieser Norm ein Banachraum ist. Es gilt wegen $\|[y] - [x]\| = \|[y - x]\| = \inf_{v \in V} \|y - x + v\|$

$$\|[y] - [x]\| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } \tilde{y} \in [y] \text{ mit } \|\tilde{y} - x\| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Sei $[x_i]$ Cauchyfolge in X/V. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $\|[x_{i+1}] - [x_i]\| < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir bestimmen nun induktiv $\tilde{x}_i \in [x_i]$ mit

$$\|\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i\| < 2^{-i} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Setze $\tilde{x}_1 = x_1$. Ist $\tilde{x}_i \in [x_i]$ schon gefunden für ein $i \in \mathbb{N}$, so ist

$$\|[x_{i+1}] - [\tilde{x}_i]\| = \|[x_{i+1}] - [x_i]\| < 2^{-i},$$

also gibt es $\tilde{x}_{i+1} \in [x_{i+1}]$ mit (1.3). Da X Banachraum, existiert $\tilde{x} = \lim_{i \to \infty} \tilde{x}_i$ und es gilt

$$\|[x_i] - [\tilde{x}]\| = \|[\tilde{x}_i] - [\tilde{x}]\| = \|[\tilde{x}_i - \tilde{x}]\| \leq \|\tilde{x}_i - \tilde{x}\| \to 0.$$

Damit ist die Vollständigkeit von X/V bewiesen. Ist nun $\|[y] - [x]\| < r$, so gibt es nach (1.2) ein $\tilde{y} \in [y]$ mit $\tilde{y} \in B_r(x)$, das heißt es gilt $B_r(p(x)) \subset p(B_r(x))$. Ist $U \subset X$ offen und $x \in U$, so gilt $B_r(x) \subset U$ für ein $r > 0$ und damit $B_r(p(x)) \subset p(U)$, das heißt $p(U)$ ist offen. Die Ungleichung $\|[x]\| \leq \|x\|$, also $\|p\| \leq 1$, wurde schon oben benutzt. Sei schließlich V echter Unterraum, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $\|[x]\| = \inf_{v \in V} \|x + v\| > 0$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{x} \in [x]$ mit

$$\|\tilde{x}\| < (1 + \varepsilon)\|[x]\| = (1 + \varepsilon)\|[\tilde{x}]\| = (1 + \varepsilon)\|p(\tilde{x})\| \leq (1 + \varepsilon)\|p\| \, \|\tilde{x}\|.$$

Dies zeigt $\|p\| \geq 1$. □

Wir kommen schließlich zu Normen, die von einem Skalarprodukt induziert sind.

Definition 1.7 (Skalarprodukt) *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Regeln erfüllt sind:*

(1) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist Sesquilinearform:*
$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu y, z\rangle &= \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle\\ \langle x, \lambda y + \mu z\rangle &= \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \overline{\mu}\langle x,z\rangle.\end{aligned}$$

(2) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist symmetrisch: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.*

(3) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist positiv definit: $\langle x,x\rangle \geq 0$, Gleichheit genau wenn $x = 0$.*

Die Euklidische Norm von $x \in X$ ist $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Satz 1.4 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) *Sei $X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarproduktraum. Dann gilt für alle $x, y \in X$:*

(1) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ *(Ungleichung von Cauchy-Schwarz).*

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Insbesondere ist die Euklidische Norm eine Norm.

Beweis: Ersetzen wir x durch λx (bzw. y durch λy), so werden beide Seiten von (1) mit demselben Faktor $|\lambda|$ multipliziert. Wir können daher $\|x\| = \|y\| = 1$ annehmen. Weiter können wir $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^+$ erreichen, indem wir x mit geeignetem $\lambda = e^{i\theta}$ multiplizieren. Mit diesen Normierungen folgt

$$\|x\|\|y\| - \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle\big) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \geq 0.$$

Daraus folgt weiter, nun für beliebige $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Damit erfüllt $\|\cdot\|$ die Dreiecksungleichung. Die weiteren Eigenschaften einer Norm ergeben sich direkt aus der Definition. $\square$

Es stellt sich die Frage, wann eine Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert ist.

Bemerkung 1.1 Ist $\|\cdot\|$ eine Skalarproduktnorm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.4}$$

Umgekehrt ist eine Norm $\|\cdot\|$ mit (1.4) eine Skalarproduktnorm, und zwar ist das zugehörige Skalarprodukt durch folgende Polarisationsformel gegeben:

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R},\\ \langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) + \frac{i}{4}\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Mithilfe der Parallelogrammgleichung kann man zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tatsächlich alle Regeln für ein Skalarprodukt erfüllt.

Definition 1.8 *Ein Hilbertraum*[4] *ist ein Skalarproduktraum* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$*, der bezüglich der Skalarproduktnorm* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *vollständig ist.*

Beispiel 1.4 Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Raum $L^2(\Omega)$ der quadratintegrierbaren Funktionen mit

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x)\, dx$$

ein Hilbertraum nach dem Satz von Fischer-Riesz.

2 Kompaktheit in metrischen Räumen

Definition 2.1 *Eine Teilmenge* K *eines metrischen Raums* (X, d) *heißt kompakt, falls gilt: jede Familie* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *von offenen Mengen mit* $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ *besitzt eine Teilfamilie* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ *mit* Λ' *endlich und* $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$*.*

Satz 2.1 (Äquivalenz der Kompaktheitsbegriffe) *Sei* (X, d) *metrischer Raum. Für* $K \subset X$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) K *ist kompakt.*

(2) K *ist vollständig (mit der induzierten Metrik) und präkompakt, das heißt für jedes* $\varrho > 0$ *lässt sich* K *durch endlich viele Kugeln* $B_\varrho(x)$*,* $x \in K$*, überdecken.*

(3) K *ist folgenkompakt: jede Folge* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *in* K *besitzt eine Teilfolge, die gegen ein* $x \in K$ *konvergiert.*

Beweis: (3) $\Rightarrow$ (2): Die Vollständigkeit ist klar, denn mit einer Teilfolge konvergiert schon die ganze Folge. Wäre K nicht präkompakt, so wähle induktiv $x_k \in K$ mit $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_\varrho(x_i)$. Für $k \neq l$ gilt dann $d(x_k, x_l) \geq \varrho$, also kann die Folge x_k keine konvergente Teilfolge haben, Widerpruch zu (3).

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, aber K wird nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt. Konstruiere sukzessive Kugeln $B_k = B_{2^{-k}}(x_k)$ mit $x_k \in K$ und $B_k \cap B_{k-1} \neq \emptyset$, so dass $B_k \cap K$ nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt wird. Ist B_{k-1} schon gefunden, so überdecke $B_{k-1} \cap K$ durch endlich viele Kugeln $B_{2^{-k}}(y_i)$, $1 \leq i \leq N$, mit $y_i \in K$ und $B_{2^{-k}}(y_i) \cap B_{k-1} \neq \emptyset$. Für wenigstens ein i wird $B_{2^{-k}}(y_i) \cap K$ nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt. Im Induktionsanfang wende dieses Argument an mit $B_0 := K$. Nach Konstruktion ist x_k eine Cauchyfolge, also $x_k \to x \in K$. Es ist $x \in U_\lambda$ für ein λ, also $B_k \subset U_\lambda$ für k hinreichend groß, im Widerspruch zur Konstruktion.

(1) $\Rightarrow$ (3): Angenommen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in K. Zu jedem $x \in K$ gibt es dann ein $\varrho > 0$ mit $x_k \in B_\varrho(x)$ höchstens für endlich viele k. Denn sonst finden wir induktiv $k_1 < k_2 < \ldots$ mit $x_{k_j} \in B_{\frac{1}{j}}(x)$, also $x_{k_j} \to x$ im Widerspruch zur Annahme. Wähle nun eine endliche Teilüberdeckung von K mit solchen Kugeln. Es folgt $x_k \in K$ nur für endlich viele k, ein Widerspruch. $\square$

[4] David Hilbert, 1862-1943

Beispiel 2.1 Sei $X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein unendlichdimensionaler Skalarproduktraum. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt findet man dann eine Folge $e_1, e_2, \ldots$ in X mit $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Es folgt

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \text{für } i \neq j.$$

Es gibt damit keine Teilfolge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert. Das bedeutet auch: abgeschlossene und beschränkte Mengen sind nicht notwendig kompakt.

Das Verfahren von Gram-Schmidt ist auf Skalarprodukträume beschränkt, man hat aber in beliebigen normierten Räumen den folgenden Ersatz.

Lemma 2.1 (fast orthogonales Element) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $V \subset X$ ein abgeschlossener, echter Teilraum. Dann gibt es zu $\theta < 1$ ein $x_\theta \in X$ mit*

$$\operatorname{dist}(x_\theta, V) \geq \theta \quad \textit{und} \quad \|x_\theta\| = 1.$$

Beweis: Wähle $x \in X\backslash V$. Da V abgeschlossen, gilt $\operatorname{dist}(x, V) > 0$ und es gibt ein $v_\theta \in V$ mit $\|x - v_\theta\| \leq \frac{1}{\theta} \operatorname{dist}(x, V)$. Setze

$$x_\theta = \frac{x - v_\theta}{\|x - v_\theta\|}.$$

Es folgt für alle $v \in V$

$$\|x_\theta - v\| = \frac{1}{\|x - v_\theta\|} \left\| x - \underbrace{v_\theta - \|x - v_\theta\| v}_{\in V} \right\| \geq \frac{\operatorname{dist}(x, V)}{\|x - v_\theta\|} \geq \theta.$$

□

Satz 2.2 (Heine-Borel) *Für einen normierten Raum X gilt:*

$$\overline{B_1(0)} \ \textit{kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \dim X < \infty.$$

Beweis: Die Implikation $\Leftarrow$ folgt aus der Äquivalenz der Normen, Satz 0.1, und dam Satz von Bolzano-Weierstraß. Für $\Rightarrow$ wähle induktiv mit Lemma 2.1 eine Folge $x_k \in X$ mit

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(x_k, \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. □

Für die Existenz von Lösungen von Gleichungen ist die Kompaktheit ein zentraler Begriff der Analysis. In der Funktionalanalysis spielen Kompaktheitskriterien für Teilmengen von Banachräumen (oder metrischen Räumen) eine bedeutende Rolle. Ein bekanntes Beispiel ist der Satz von Arzelà-Ascoli, den wir nun behandeln wollen.

Definition 2.2 *Seien X, Y metrische Räume. Wir setzen*

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \{f : X \to Y : f(X) \ \textit{ist beschränkt}\}, \\ C^0(X,Y) &= \{f : X \to Y : f \ \textit{ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Satz 2.3 *Seien X, Y metrische Räume, Y vollständig.*

(1) *$B(X,Y)$ ist vollständiger metrischer Raum mit $d_B(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.*

(2) *$(C^0 \cap B)(X,Y)$ ist abgeschlossen in $(B(X,Y), d_B)$, insbesondere ist $(C^0 \cap B)(X,Y)$ vollständiger metrischer Raum mit d_B.*

Beweis: Es ist klar, dass $d_B(f,g)$ eine Metrik auf $B(X,Y)$ ist. Sei f_k eine Cauchyfolge in $B(X,Y)$, also

$$d(f_k(x), f_l(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X,\ k,l \geq k(\varepsilon).$$

Da Y vollständig, existiert $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Mit $l \to \infty$ erhalten wir

$$d(f_k(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X,\ k \geq k(\varepsilon),$$

also $d_B(f_k, f) \to 0$ mit $k \to \infty$. Außerdem ist f beschränkt, denn für $k = k(\varepsilon)$ ist

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_k(x))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x), f_k(x_0))}_{\leq \operatorname{diam} f_k(X) < \infty} + \underbrace{d(f_k(x_0), f(x_0))}_{\leq \varepsilon}.$$

Ist f_k stetig für $k = k(\varepsilon)$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$, und die Abschätzung liefert

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_k(x))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x), f_k(x_0))}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x_0), f(x_0))}_{\leq \varepsilon} < 3\varepsilon.$$

Also ist $C^0 \cap B(X,Y)$ abgeschlossene Teilmenge. □

Definition 2.3 *Die Oszillation von $f : (X,d) \to (Y,d)$ ist die Funktion*

$$\omega_f : (0,\infty) \to [0,\infty],\ \omega_f(\delta) = \sup_{d(x_1,x_2)<\delta} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Gilt $\omega_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$, so heißt f gleichmäßig stetig. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Abbildungen $f : X \to Y$ heißt gleichgradig stetig, falls $\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$.

Alternativ kann die gleichgradige Stetigkeit wie folgt formuliert werden:

> für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d(x_1, x_2) < \delta$.

Beispiel 2.2 Sei $0 < \alpha \leq 1$. Die α-Hölderkonstante von $f : (X,d) \to (Y,d)$ ist

$$[f]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)^\alpha}.$$

f heißt α-Hölderstetig wenn $[f]_\alpha < \infty$. Offenbar gilt

$$d(f(x), f(y)) = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)^\alpha} d(x,y)^\alpha \leq [f]_\alpha\, \delta^\alpha \quad \text{falls } d(x,y) \leq \delta.$$

Die Oszillation erfüllt also die Abschätzung

$$\omega_f(\delta) \leq [f]_\alpha\, \delta^\alpha. \tag{2.5}$$

Eine Hölderstetige Funktion ist also gleichmäßig stetig, und für jedes $\Lambda < \infty$ ist die Familie $\mathcal{F} = \{f : X \to Y : [f]_\alpha \leq \Lambda\}$ gleichgradig stetig.

Satz 2.4 (Arzelà-Ascoli) [5] *Seien X, Z metrische Räume, X kompakt und Z vollständig. Für $\mathcal{F} \subset C^0(X,Z)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig und $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ ist relativ kompakt in Z für jedes $x \in X$.*

(2) *Jede Folge f_k in $\mathcal{F}$ hat eine Teilfolge f_{k_j}, die gleichmäßig gegen ein $f \in C^0(X,Z)$ gleichmäßig konvergiert.*

(3) *$\mathcal{F}$ ist relativ kompakt in $(C^0(X,Z), d_B)$.*

Zur Erinnerung: eine Teilmenge eines metrischen (oder topologischen) Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist. Die wesentliche Aussage des Satzes ist die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2), nämlich ein Kriterium für die Existenz gleichmäßig konvergenter Teilfolgen.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) : Da X kompakt, gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset X$. Zum Beispiel kann man dafür X mit endlich vielen Kugeln vom Radius $\frac{1}{\nu}$ überdecken für $\nu = 1, 2, \ldots$; die Menge der Mittelpunkte ist dann dicht. Für jedes $x \in X$ hat die Folge $f_k(x)$ eine konvergente Teilfolge, also folgt mit einem Diagonalfolgenargument

$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert für alle $x \in D$.

Für $x_1, x_2 \in D$ mit $d(x_1, x_2) \leq \delta$ folgt $d(f(x_1), f(x_2)) = \lim_{k\to\infty} d(f_k(x_1), f_k(x_2))$, also

$$\omega_f(\delta) \leq \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \omega_\varphi(\delta) =: \omega(\delta) \to 0 \quad \text{mit } \delta \to 0.$$

Somit ist $f : D \to Z$ gleichmäßig stetig, und es existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $f \in C^0(X,Z)$. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $\delta > 0$ ist $\{B_\delta(x) : x \in D\}$ offene Überdeckung von X, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{B_\delta(x) : x \in D_\delta\}$. Zu $x \in X$ gibt es ein $y \in D_\delta$ mit $d(x,y) < \delta$, und es folgt

$$\begin{aligned} d(f_k(x), f(x)) &\leq d(f_k(x), f_k(y)) + d(f_k(y), f(y)) + d(f(y), f(x)) \\ &\leq \max_{y\in D_\delta} d(f_k(y), f(y)) + 2\omega(\delta). \end{aligned}$$

Das Supremum über $x \in X$ liefert

$$d_B(f_k, f) \leq \max_{y\in D_\delta} d(f_k(y), f(y)) + 2\omega(\delta),$$

und schließlich folgt wie behauptet

$$\limsup_{k\to\infty} d_B(f_k, f) \leq 2\omega(\delta) \to 0 \quad \text{mit } \delta \to 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Nach (2) ist $\overline{\mathcal{F}}$ folgenkompakt, also folgt (3) aus Satz 2.1.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Wir zeigen als erstes, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist. Nach Satz 2.1 ist $\overline{\mathcal{F}}$ präkompakt, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\{f_1, \ldots, f_N\} \subset \overline{\mathcal{F}}$ mit

$$\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(f_j),$$

[5] C. Arzelà, 1847-1912 und G. Ascoli, 1843-1896

das heißt zu $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ mit $d_B(f, f_j) \leq \varepsilon$. Es folgt für $d(x,y) \leq \delta$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_j(x)) + d(f_j(x), f_j(y)) + d(f_j(y), f(y)) \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \omega_{f_j}(\delta) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Bilde das Supremum über alle $x, y \in X$, $d(x,y) \leq \delta$, und alle $f \in \mathcal{F}$:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_f(\delta) \leq \max_{1 \leq j \leq N} \omega_{f_j}(\delta) + 2\varepsilon.$$

Lass nun $\delta \to 0$. Da $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist wegen X kompakt, gilt $\omega_{f_j}(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$, also

$$\limsup_{\delta \to 0} \big(\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_f(\delta) \big) \leq 2\varepsilon.$$

Damit ist die gleichgradige Stetigkeit von $\mathcal{F}$ bewiesen. Betrachte schließlich eine Folge $z_k = f_k(x)$ mit $f_k \in \mathcal{F}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt $f_k \to f \in C^0(X, Z)$ gleichmäßig, insbesondere $z_k = f_k(x) \to f(x)$. Damit sind beide Aussagen in (1) gezeigt. $\square$

Als Anwendung zeigen wir einen Kompaktheitssatz für Hölderstetige Funktionen. Sei X metrischer Raum. Für $u : X \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} = \|u\|_{C^0(X)} + [u]_{\alpha,X} = \sup_{x \in X} |u(x)| + \sup_{x,y \in X,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

Dabei ist $0 < \alpha \leq 1$. Es gilt der

Satz 2.5 $C^{0,\alpha}(X) = \{u \in C^0(X) : \|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} < \infty\}$ *ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$ eine Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(X)}$. Dann ist $u_k \in (C^0 \cap B)(X)$, und u_k ist Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm. Nach Satz 2.3 konvergiert u_k bezüglich der Supremumsnorm gegen ein $u \in (C^0 \cap B)(X)$. Nun gilt für $x, y \in X$ mit $x \neq y$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k \to \infty} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \lim_{k \to \infty} \|u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

Somit ist $u \in C^{0,\alpha}(X)$, und weiter

$$\frac{|(u - u_k)(x) - (u - u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{l \to \infty} \frac{|(u_l - u_k)(x) - (u_l - u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \limsup_{l \to \infty} \|u_l - u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)}.$$

Es folgt $[u - u_k]_{\alpha,X} < \varepsilon$ für $k \geq k(\varepsilon)$, das heißt die Folge konvergiert gegen u in der $C^{0,\alpha}$-Norm. $\square$

Satz 2.6 (Einbettung von Hölderräumen) *Sei X kompakter metrischer Raum, und $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, eine Folge mit $\|u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)} \leq \Lambda < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in C^{0,\alpha}(X)$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:*

$$u_k \to u \text{ in } C^{0,\beta}(X) \quad \text{für jedes } 0 \leq \beta < \alpha.$$

Beweis: Nach (2.5) gilt für die Oszillation die Abschätzung

$$\omega_{u_k}(\delta) \leq [u_k]_{\alpha,X}\delta^\alpha \leq \Lambda\delta^\alpha.$$

Damit ist die Folge u_k gleichgradig stetig. Außerdem ist die reelle Folge $u_k(x)$ beschränkt für jedes x, also relativ kompakt in $\mathbb{R}$. Nach Arzelà-Ascoli gibt es ein $u \in C^0(X)$, so dass $u_k \to u$ in $C^0(X)$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Es gilt $u \in C^{0,\alpha}(X)$, denn

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \Lambda < \infty.$$

Für $d(x,y) \leq \delta$ gilt die Abschätzung

$$\frac{|(u-u_k)(x)-(u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} = d(x,y)^{\alpha-\beta} \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_l-u_k)(x)-(u_l-u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq 2\Lambda\delta^{\alpha-\beta}.$$

Andererseits gilt für $d(x,y) \geq \delta$

$$\frac{|(u-u_k)(x)-(u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} \leq 2\delta^{-\beta}\|u-u_k\|_{C^0(X)}.$$

Also folgt

$$\limsup_{k\to\infty}[u-u_k]_{\beta,X} \leq 2\Lambda\delta^{\alpha-\beta} \to 0 \quad \text{ mit } \delta \to 0,$$

das heißt $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}(X)$ wie behauptet. □

Hölderstetige Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der Analysis von elliptischen Differentialgleichungen. Im Folgenden skizzieren wir das am Beispiel eines Randwertproblems. Wir brauchen dafür eine Verallgemeinerung von Satz 2.6 auf die Situation, wenn Ableitungen Hölderstetig sind. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Für $u \in C^k(\Omega)$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^k(\Omega)} &= \sum_{0\leq|\gamma|\leq k} \|D^\gamma u\|_{C^0(\Omega)},\\
\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_{\alpha,\Omega}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ die Ableitungsordnung von $D^\gamma = \partial_1^{\gamma_1}\ldots\partial_n^{\gamma_n}$. Wir definieren die Funktionenräume

$$\begin{aligned}
C^k(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^k(\Omega) : D^\gamma u \text{ ist auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar für alle } |\gamma| \leq k\},\\
C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\}.
\end{aligned}$$

Satz 2.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt:*

(1) $(C^k(\overline{\Omega}), \|u\|_{C^k(\Omega)})$ *ist ein Banachraum.*

(2) $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)})$ *ist ein Banachraum.*

Beweis: (1) gilt für $k = 0$ nach Satz 2.3(2). Betrachte für $k = 1$ eine Cauchyfolge $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|u\|_{C^1(\Omega)}$. Dann gilt $u_j \to u \in C^0(\overline{\Omega})$ sowie $\partial_i u_j \to v_i \in C^0(\overline{\Omega})$ gleichmäßig mit $j \to \infty$. Für $x_0 \in \Omega$ und $s \in \mathbb{R}$ hinreichend klein gilt

$$u_j(x_0 + se_i) = u_j(x_0) + \int_0^s \partial_i u_j(x_0 + te_i)\, dt.$$

Mit $j \to \infty$ erhalten wir

$$u(x_0 + se_i) = u(x_0) + \int_0^s v_i(x_0 + te_i)\, dt,$$

also durch Differentiation $\partial_i u(x_0) = v_i(x_0)$. Somit ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\|u - u_j\|_{C^1(\Omega)} \to 0$. Im Fall $k \geq 2$ konvergiert eine Cauchyfolge u_j bezüglich $\|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ gegen $u \in C^1(\overline{\Omega})$, und nach Induktion konvergiert $\partial_i u_j$ gegen $v_i \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k-1}(\Omega)}$. Es folgt $v_i = \partial_i u$ und hieraus Behauptung (1).

Sei jetzt $u_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$. Dann gilt zunächst $u_j \to u$ in $C^k(\overline{\Omega})$ wie gerade gezeigt. Für $|\gamma| = k$ gilt weiter $D^\gamma u_j \to v^\gamma$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ nach Satz 2.5. Es folgt $v^\gamma = D^\gamma u$ und $u_j \to u$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$. □

Wir brauchen nun folgenden technischen Begriff.

Definition 2.4 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat Sehnenbogenkonstante $\kappa \in [1, \infty)$, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in \Omega$ einen C^1-Weg γ von x nach y gibt mit $L(\gamma) \leq \kappa |x - y|$.*

Satz 2.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Sehnenbogenkonstante $\kappa < \infty$, und seien $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $k + \alpha > l + \beta$. Ist $u_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Folge mit $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda < \infty$, so konvergiert eine Teilfolge in $C^{l,\beta}(\overline{\Omega})$.*

Beweis: Wir gehen in vier Schritten vor.
Schritt 1 Der Fall $k = l = 0$ (also $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$) gilt nach Satz 2.6.

Schritt 2: Es gilt $\|u\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq C\, \|u\|_{C^1(\Omega)}$:
Für $x, y \in \Omega$ sei $\gamma \in C^1([0, 1], \Omega)$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $L(\gamma) \leq \kappa |x - y|$. Es folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \Big| \int_0^1 Du(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \Big| \leq \|Du\|_{C^0(\Omega)} \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt \leq \kappa \|Du\|_{C^0(\Omega)} |x - y|.$$

Schritt 3: Der Fall $k = l \geq 1$, $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$:
Nach Schritt 2 und Schritt 1 gilt induktiv $u_j \to u$ in $C^{k-1}(\overline{\Omega})$, Ferner nach Schritt 1 $D^\gamma u_j \to v^\gamma$ in $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ für $|\gamma| = k$. Wie in Satz 2.7 folgt $v^\gamma = D^\gamma u$ für $|\gamma| = k$, also $u_j \to u$ in $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$.

Schritt 4: Der Fall $k > l \geq 0$:
Nach Schritt 2 gilt $\|u_j\|_{C^{l+1}(\Omega)} \leq C \|u_j\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda$. Für $\alpha > 0$ haben wir $u_j \to u$ in $C^k(\overline{\Omega})$ mit Schritt 3, also $u_j \to u$ in $C^{l,1}(\overline{\Omega})$ nach Schritt 2. Für $\alpha = 0, \beta = 1$ ist $k \geq l + 2$. Es gilt dann mit Schritt 2

$$\|u\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{C^k(\Omega)} \leq C\Lambda.$$

Nach Schritt 3 folgt $u_j \to u$ in $C^{k-1}(\overline{\Omega})$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Jetzt kommen wir (endlich) zu der Anwendung. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet. Betrachte das Randwertproblem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u + cu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Im Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = c = 0$ handelt es sich um die klassische Poissongleichung $\Delta u = f$, allgemein sind die Koeffizienten a_{ij}, b_i, c beliebige Funktionen auf Ω. Wir setzen aber voraus, dass für gewisse Konstanten $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ folgende Bedingungen gelten:

$$\max_{1\le i,j\le n} \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},\ \max_{1\le i\le n} \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},\ \|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \le \Lambda, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Die Voraussetzung (2.7) heißt Elliptizitätsbedingung, salopp gesagt bedeutet sie, dass die Gleichung vom Typ der Poissongleichung ist. Um das Problem funktionalanalytisch zu formulieren, betrachten wir den linearen Operator

$$L : C^2_0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega}),\ Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u + cu,$$

wobei $C^2_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Das Randwertproblem hat somit die Kurzfassung

$$Lu = f.$$

Die Regularitätsbedingung (2.6) impliziert, dass L ein beschränkter Operator ist:

$$\|Lu\|_{C^0(\Omega)} \le \Lambda\Big(\sum_{i,j=1}^n \|\partial^2_{ij}u\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{C^0(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\Big) = \Lambda\|u\|_{C^2(\Omega)}.$$

Für die Operatornorm gilt also $\|L\| \le \Lambda$. Wir verwenden ohne Beweis die folgenden a priori Abschätzungen von Schauder[6]. Sie sind ein fundamentales Resultat aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen, siehe [**?**, Theorem 6.19].

Satz 2.9 (Regularitätssatz von Schauder) *Seien Ω und L wie oben, und $u \in C^2_0(\overline{\Omega})$ sei Lösung von $Lu = f$. Ist $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von den Daten $n, \alpha, \lambda, \Lambda$ und Ω abhängt.

[6] J. Schauder, 1899-1943

Die Aussage des Satzes ist grob gesprochen, dass die Lösung u maximal regulär ist, das heißt u ist so gut wie es die Daten Ω, a_{ij}, b_i, c, f erlauben. Im Fall von C^∞-Daten wäre die Lösung beispielsweise ebenfalls von der Klasse C^∞. Ein anderes, wohlbekanntes Beispiel für eine elliptische Differentialgleichung ist die Cauchy-Riemann Gleichung aus der Funktionentheorie, und man hat dort eine analoge Verbesserung der Regularität: differenzierbare Lösungen sind automatisch unendlich oft differenzierbar. Auch in der Funktionentheorie ist es wichtig, dass nicht nur die Regularität verbessert wird, sondern durch Abschätzungen quantitativ kontrolliert werden kann. Wir interessieren uns nun für die Lösungen des homogenen Problems, also zur rechten Seite $f \equiv 0$.

Folgerung 2.1 *Der Kern von $L : C^2_0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ ist endlichdimensional.*

Beweis: Wähle auf $\ker L$ die Norm $\|u\|_{C^0(\Omega)}$. Sei $u_k \in \ker L$ eine beliebige Folge mit $\|u_k\|_{C^0(\Omega)} \leq 1$ für alle k. Aus Satz 2.9 (mit $f \equiv 0$) folgt, dass die Folge u_k in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ beschränkt ist. Nach Satz 2.8 gilt für eine Teilfolge

$$u_k \to u \quad \text{in } C^2(\overline{\Omega}), \text{ insbesondere } u \in \ker L.$$

Die Einheitskugel in $\ker L$ ist somit bezüglich der C^0-Norm kompakt, das heißt $\ker L$ ist endlichdimensional nach dem Satz von Heine-Borel, Satz 2.2. $\square$

3 Existenz linearer Funktionale

In einem endlichdimensionalen, normierten Vektorraum X kann man Funktionale $\varphi \in X'$ durch ihre Werte auf einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ definieren. Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ist die gegebene Norm $\|x\|$ äquivalent zu $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ nach Satz 0.1, damit ist φ automatisch stetig:

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)|\,|x_i| \leq \big(\max_{1\leq i\leq n} |\varphi(e_i)|\big) \sum_{i=1}^n |x_i| \leq C\|x\|.$$

Für $\dim X = \infty$ könnten Linearformen zwar ebenfalls über eine Basis definiert werden, aber die Stetigkeit bzw. Beschränktheit wäre unklar. Der folgende Satz erlaubt induktiv die Konstruktion von linearen Funktionalen, bei Beibehaltung der Norm. Statt einer Norm wird etwas allgemeiner eine Abschätzung durch eine sublineare Funktion betrachtet.

Satz 3.1 (Hahn-Banach) [7] *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, das heißt*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \textit{für alle } \lambda \geq 0,\, x \in X, \\ p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \textit{für alle } x, y \in X. \end{aligned}$$

Sei $V \subset X$ ein Unterraum und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\varphi(v) \leq p(v) \quad \textit{für alle } v \in V.$$

Dann gibt es eine Linearform $\phi : X \to \mathbb{R}$ mit $\phi|_V = \varphi$ und $\phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

[7] H. Hahn, 1879-1934

Beweis:
Schritt 1: Für $x \notin V$ konstruieren wir eine Fortsetzung $\phi : V \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ mit $\phi \leq p$.
Definiere $\phi(v + \alpha x) = \varphi(v) + \alpha s$, wobei $s = \phi(x)$ noch zu bestimmen ist. Damit ist ϕ wohldefiniert, linear, und es gilt $\phi|_V = \varphi$. Wir brauchen

$$p(v + \alpha x) \geq \varphi(v) + \alpha s \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R},\ v \in V. \tag{3.8}$$

Nach Voraussetzung gilt das für $\alpha = 0$. Es reicht dann $\alpha = \pm 1$, denn für $\alpha > 0$ folgt

$$p(v \pm \alpha x) = \alpha\, p(\frac{v}{\alpha} \pm x) \geq \alpha\big(\varphi(\frac{v}{\alpha}) \pm s\big) = \varphi(v) \pm \alpha s.$$

Wir können also $s \in \mathbb{R}$ mit (3.8) wählen, falls

$$\inf_{v \in V} \big(p(v + x) - \varphi(v)\big) \geq \sup_{v' \in V} \big(\varphi(v') - p(v' - x)\big).$$

Aber nach Voraussetzung gilt

$$p(v + x) + p(v' - x) \geq p(v + v') \geq \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v').$$

Damit ist Schritt 1 gezeigt.

Schritt 2: X hat eine abzählbare Basis $\{x_1, x_2, \ldots\}$
Definiere induktiv $i_1 < i_2 < \ldots$ kleinstmöglich mit $x_{i_k} \notin V \oplus \operatorname{span}\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}\}$. Es folgt $X = V \oplus \operatorname{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$. Mit Schritt 1 erhalten wir die verlangte Fortsetzung induktiv auf ganz X.

Schritt 3: Konstruktion für X beliebig
Wir führen die Behauptung auf das Lemma von Zorn zurück[8]. Dieses ist kein Lemma, sondern in unserem Rahmen ein Axiom, das gleichwertig mit dem Auswahlaxiom oder dem Wohlordnungsprinzip ist. Es stellt eine Art verallgemeinerte Induktion dar.

Definition 3.1 (induktive Ordnung) *Eine Menge A mit einer Relation $\leq$ heißt teilweise geordnet, wenn für alle $a, b, c \in A$ Folgendes gilt:*

$$\begin{aligned} & a \leq a \\ & a \leq b,\ b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b, \\ & a \leq b,\ b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c. \end{aligned}$$

(1) *$M \subset A$ heißt total geordnet $\Leftrightarrow$ für $a, b \in M$ gilt stets $a \leq b$ oder $b \leq a$.*

(2) *$m \in A$ heißt maximales Element $\Leftrightarrow$ aus $m \leq a \in A$ folgt $a = m$.*

(3) *$b \in A$ heißt obere Schranke von M $\Leftrightarrow$ $a \leq b$ für alle $a \in M$.*

(4) *A heißt induktiv geordnet $\Leftrightarrow$ jede total geordnete Menge $M \subset A$ hat eine obere Schranke.*

[8] M. Zorn, 1906-1993

Zum Beispiel kann man auf einem Baum die Relation $a \leq b$ betrachten, bei der b ein Wachstums-Nachfolger von a ist. Dann sind nicht alle Punkte des Baums vergleichbar, eine gewachsene Folge von Ästen ist aber total geordnet. Jede Zweigspitze ist ein maximales Element.

Lemma von Zorn *Ist $(A, \leq)$ induktiv geordnet, so hat A (mindestens) ein maximales Element.*

Wir zeigen jetzt Satz 3.1 mit dem Lemma von Zorn. Sei A die Menge aller Paare (W, ψ), wobei $W \supset V$ Unterraum, $\psi : W \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi|_V = \varphi$ und $\psi(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$. Definiere die teilweise Ordnung

$$(W_1, \psi_1) \leq (W_2, \psi_2) \quad \Leftrightarrow \quad W_1 \subset W_2,\ \psi_2|_{W_1} = \psi_1.$$

Die Regeln der teilweisen Ordnung sind leicht zu prüfen. Wir zeigen nun, dass A induktiv geordnet ist. Sei dazu $M = (W_i, \psi_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge von A. Setze

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i \quad \text{und} \quad \psi : W \to \mathbb{R},\ \psi|_{W_i} = \psi_i.$$

Für $i, j \in I$ gilt $W_i \subset W_j$ und $\psi_j|_{W_i} = \psi_i$, oder umgekehrt. Damit sieht man:

- W ist linearer Unterraum,
- ψ ist wohldefiniert, linear und $\psi|_V = \varphi$,
- $\psi(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$.

Somit ist (W, ψ) eine obere Schranke von M, also A induktiv geordnet. Sei nun nach Zorn (W, ϕ) maximales Element von A. Wäre W ein echter Unterraum von X, so könnten wir mit Schritt 1 eine Fortsetzung von (W, ϕ) bestimmen, im Widerspruch zur Maximalität. Die gewünschte Fortsetzung (X, ϕ) ist also gefunden, der Satz von Hahn-Banach bewiesen. $\square$

Satz 3.2 (Hahn-Banach für lineare Funktionale) *Sei X normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \subset X$ Unterraum mit der induzierten Norm. Dann gibt es zu $\varphi \in V'$ ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi = \varphi \text{ auf } V \quad \text{und} \quad \|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}.$$

Beweis: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wähle $p : X \to \mathbb{R}$, $p(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|$. Dann ist p sublinear, und

$$|\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{V'} \|v\| = p(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Fortsetzung $\phi : X \to \mathbb{R}$ nach Satz 3.1 erfüllt $\phi(x) \leq p(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|$, also gilt $\|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}$ wie verlangt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachte $\varphi_1 = \operatorname{Re} \varphi : V \to \mathbb{R}$, also $|\varphi_1(v)| \leq |\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{V'} \|v\|$ für alle $v \in V$. Wähle ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional $\phi_1 : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi_1 = \varphi_1 \text{ auf } V \quad \text{und} \quad \|\phi_1\|_{X'} = \|\varphi_1\|_{V'}.$$

Definiere $\phi(x) = \phi_1(x) - i\phi_1(ix)$. Dann ist ϕ linear über $\mathbb{C}$, denn

$$\phi(ix) = \phi_1(ix) - i\phi_1(-x) = i\big(\phi_1(x) - i\phi_1(ix)\big) = i\phi(x).$$

Weiter folgt für alle $v \in V$

$$\phi(v) = \varphi_1(v) - i\varphi_1(iv) = \operatorname{Re}\varphi(v) - i\operatorname{Re}\varphi(iv) = \operatorname{Re}\varphi(v) + i\operatorname{Im}\varphi(v) = \varphi(v).$$

Schließlich gilt mit geeignetem $\theta \in [0, 2\pi)$

$$|\phi(x)| = e^{i\theta}\phi(x) = \underbrace{\phi(e^{i\theta}x)}_{\in\mathbb{R}} = \phi_1(e^{i\theta}x) \leq \|\varphi_1\|_{V'}\,\|e^{i\theta}x\| \leq \|\varphi\|_{V'}\,\|x\|.$$

□

Der Satz von Hahn-Banach ist ein grundlegendes Resultat der Funktionalanalysis. Es ist etwas unbefriedigend, dass es auf das nichtkonstruktive Lemma von Zorn zurückgreifen muss. In vielen Fällen ist das tatsächlich unnötig, was wir kurz erläutern wollen. Ein metrischer Raum (und allgemeiner ein topologischer Raum) heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Für einen normierten Raum X ist das gleichbedeutend damit, dass eine linear unabhängige Menge $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$ existiert mit

$$X = \overline{\operatorname{Span}(B)}.$$

Eine solche Menge B wird manchmal eine Basis von X genannt (zur Unterscheidung bezeichnet man eine Basis im Sinne der Linearen Algebra als *Hamel-Basis*[9]; in der Funktional-Analysis spielen Hamel-Basen in aller Regel keine Rolle). Die Äquivalenz ergibt sich wie folgt: hat man eine abzählbare dichte Teilmenge, so kann man wie in Satz 3.1 induktiv Elemente weglassen und gelangt zu einer Basis B. Hat man umgekehrt eine abzählbare Basis B, so sind die Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten abzählbar und dicht in X.

Sei nun X separabel und $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$ eine Basis von X. Ein gegebenes Funktional $\varphi : V \to \mathbb{R}$ können wir mit Induktion nach Satz 3.1, Schritt 2, fortsetzen zu

$$\phi : V \oplus \operatorname{Span} B \to \mathbb{R},\ \phi|_V = \varphi, \qquad \text{wobei } \|\phi\| \leq \|\varphi\|.$$

Da ϕ Lipschitzstetig ist, existiert dann eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\phi : X = \overline{V \oplus \operatorname{Span} B} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit } \|\phi\| \leq \|\varphi\|.$$

Wir können also hier auf das Lemma von Zorn verzichten und stattdessen die Fortsetzung per Stetigkeit verwenden. Ein konkretes Beispiel sind die Räume $L^p(\Omega)$, die für $1 \leq p < \infty$ separabel sind. Wir kommen nun zu Anwendungen. Im Folgenden sind die Normen von linearen Funktionalen auf den jeweiligen Definitionsbereichen zu nehmen.

Folgerung 3.1 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Ist $V \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in X$ mit* $\operatorname{dist}(x_0, V) > 0$[10]*, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi|_V = 0,\ \|\phi\| = 1 \quad \textit{und} \quad \phi(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, V).$$

Beweis: Definiere das lineare Funktional $\varphi \in (V \oplus \mathbb{R}x_0)'$ durch $\varphi(v + \alpha x_0) = \alpha \operatorname{dist}(x_0, V)$. Es gilt $\varphi|_V = 0$ und für $\alpha \neq 0$, $v \in V$

$$\|v + \alpha x_0\| = |\alpha|\,\|\frac{v}{\alpha} + x_0\| \geq |\alpha|\ \operatorname{dist}(x_0, V) = |\varphi(v + \alpha x_0)|.$$

[9] G. Hamel, 1877-1954

[10] e.g. V abgeschlossen und $x_0 \notin V$

Also gilt $\|\varphi\| \leq 1$. Wegen $\operatorname{dist}(x_0, V) > 0$ gibt es andererseits ein $v_\varepsilon \in V$ mit $\|v_\varepsilon - x_0\| < (1+\varepsilon)\operatorname{dist}(x_0, V)$, also folgt

$$|\varphi(v_\varepsilon - x_0)| = \operatorname{dist}(x_0, V) > \frac{1}{1+\varepsilon}\|v_\varepsilon - x_0\|.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\|\varphi\| \geq 1$. Setze nun φ mit gleicher Norm fort nach Satz 3.2. □

Folgerung 3.2 *In einem normierten Vektorraum X gelten folgende Aussagen:*

(1) *Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x_0) = \|x_0\|$.*

(2) *Aus $\phi(x) = 0$ für alle $\phi \in X'$ folgt $x = 0$.*

Beweis: (1) ist der Spezialfall $V = \{0\}$ in Folgerung 3.1, es ist dann $\operatorname{dist}(x_0, V) = \|x_0\|$. Behauptung (2) folgt unmittelbar. □

Wir kommen nun zu Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach auf die Trennung von konvexen Mengen. Dazu folgendes Lemma.

Lemma 3.1 *Sei X normierter Raum. Ist $K \subset X$ offen konvex mit $0 \in K$, so ist*

$$p : X \to [0, \infty),\ p(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in K\},$$

sublinear und es gilt $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Beweis: Es gilt $p(0) = 0$ und $p(x) < \infty$ für alle $x \in X$, da K eine Kugel um den Nullpunkt enthält. Wir behaupten für $x \in X$, $t > 0$ beliebig

$$\frac{x}{t} \in K \quad \Leftrightarrow \quad p(x) < t. \tag{3.9}$$

Sei $\frac{x}{t} \in K$. Da K offen, gilt $\frac{x}{s} \in K$ für $s < t$ nahe bei t, also $p(x) \leq s < t$. Ist umgekehrt $p(x) < t$, so wähle $s \in (p(x), t)$ mit $\frac{x}{s} \in K$. Da K sternförmig bezüglich des Nullpunkts, folgt

$$\frac{x}{t} = \frac{s}{t} \cdot \frac{x}{s} \in K.$$

Also ist (3.9) gezeigt, insbesondere $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Für $\lambda > 0$ gilt mit $s = \frac{t}{\lambda}$

$$p(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \frac{\lambda x}{t} \in K\} = \lambda \inf\{s > 0 : \frac{x}{s} \in K\} = \lambda p(x).$$

Es bleibt die Subadditivität. Für $x, y \in X$ wähle $\lambda > p(x)$, $\mu > p(y)$. Dann gilt

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in K} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in K} \in K,$$

und es folgt

$$1 > p\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}\Big) = p\Big(\frac{x+y}{\lambda+\mu}\Big) = \frac{p(x+y)}{\lambda+\mu}.$$

Mit $\lambda \searrow p(x)$, $\mu \searrow p(y)$ folgt $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. □

Bemerkung. Ist K beschränkt, so gilt $p(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Ist außerdem K symmetrisch bezüglich des Nullpunkts, so ist $p(x)$ eine Norm auf X, die zu der gegebenen Norm äquivalent ist.

Das folgende Lemma ist eine Vorstufe zur Trennung von zwei konvexen Mengen.

Lemma 3.2 *Sei $K \subset (X, \|\cdot\|)$ offen und konvex. Zu jedem $x_0 \notin K$ gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi(x) < \phi(x_0) \quad \textit{für alle } x \in K.$$

Beweis: Durch Translation können wir $0 \in K$ annehmen. Sei $p : X \to [0, \infty)$ wie in Lemma 3.1. Setze $\varphi(tx_0) = t$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} x = tx_0 \text{ mit } t > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{t} = x_0 \notin K, \text{ also } p(x) \geq t = \varphi(x), \\ x = tx_0 \text{ mit } t \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(x) = t \leq 0 \leq p(x). \end{aligned}$$

Nach Satz 3.1 gibt es eine lineare Fortsetzung $\phi : X \to \mathbb{R}$ von φ mit $\phi \leq p$. Für $x \in K$ gilt $\phi(x) \leq p(x) < 1$, aber $\phi(x_0) = \varphi(x_0) = 1$. Es bleibt die Stetigkeit von ϕ zu zeigen. Wähle dazu $\overline{B_\varrho(0)} \subset K$ und schätze ab

$$\phi(x) \leq p(x) = \frac{\|x\|}{\varrho} p\Big(\varrho \frac{x}{\|x\|}\Big) \leq \frac{1}{\varrho}\|x\|.$$

□

Satz 3.3 (Hahn-Banach für konvexe Mengen) *Sei X normierter Raum und $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Ist zusätzlich A offen, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi(x) < \phi(y) \quad \textit{für alle } x \in A,\, y \in B.$$

Beweis: Betrachte die Menge

$$K = \{x - y : x \in A,\, y \in B\} = \bigcup_{y \in B} \{x - y : x \in A\}.$$

Da K Vereinigung von offenen Mengen, ist K offen und konvex wegen

$$\lambda(x_1 - y_1) + \mu(x_2 - y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) \in K.$$

Ferner gilt $0 \notin K$ wegen $A \cap B = \emptyset$. Nach Lemma 3.2 gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\phi(z) < \phi(0) = 0$ für alle $z \in K$, also $\phi(x) < \phi(y)$ für alle $x \in A$, $y \in B$. □

Die Aussage des Satzes bedeutet, dass A und B durch eine affine Hyperebene getrennt werden. Genauer sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in A} \phi(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} \phi(y).$$

A liegt dann im offenen Halbraum $\{\phi < \alpha\}$, und B im abgeschlossenen Halbraum $\{\phi \geq \alpha\}$. Wir brauchen später folgende Variante von Satz 3.3.

Folgerung 3.3 *Sei X normierter Raum und $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Ist zusätzlich A abgeschlossen und B kompakt, so können A, B strikt getrennt werden, das heißt*

$$\sup_{x \in A} \phi(x) < \inf_{y \in B} \phi(y).$$

Beweis: Betrachte für $\varrho > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} A_\varrho &= A + B_\varrho(0) = \{x + z : x \in A, z \in B_\varrho(0)\}, \\ B_\varrho &= B + B_\varrho(0) = \{y + z : y \in B, z \in B_\varrho(0)\}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass A_ϱ, B_ϱ offen und konvex sind. Da A abgeschlossen und B kompakt, ist $A_\varrho \cap B_\varrho = \emptyset$ für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Nach Satz 3.3 werden A_ϱ, B_ϱ durch ein $\phi \in X'$ getrennt. Für alle $x \in A$, $y \in B$ und $z, z' \in B_\varrho(0)$ folgt

$$\phi(x) + \varrho\phi(z) = \phi(x + \varrho z) \leq \phi(y + \varrho z') \leq \phi(y) + \varrho\phi(z').$$

Bilde links das Supremum über $z \in B_\varrho(0)$, rechts das Infimum über $z' \in B_\varrho(0)$:

$$\phi(x) + \varrho\|\phi\| \leq \phi(y) - \varrho\|\phi\|.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir das Supremum bzw. Infimum bzgl. $x \in A$, $y \in B$ nehmen. $\square$

Eine weitere Anwednung ist eine Verschärfung von Lemma 3.2.

Folgerung 3.4 *Sei X normierter Raum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Ist $0 \notin K$, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und*

$$\phi(x) \leq -\operatorname{dist}(0, K) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Beweis: Setze $R = \operatorname{dist}(0, K)$, also $R > 0$ nach Voraussetzung. Nach Satz 3.3 gibt es ein $\phi \in X'$, so dass K und $B_R(0)$ getrennt werden. Nach Normierung gilt $\|\phi\| = 1$. Es folgt

$$\sup_{x \in K} \phi(x) \leq \inf_{y \in B_R(0)} \phi(y) = R \inf_{z \in B_1(0)} \phi(z) = -R\|\phi\| = -R.$$

$\square$

Die letzte Folgerung dieses Abschnitts bringt das Prinzip zum Ausdruck, dass der Dualraum X' mindestens so groß ist wie der Raum X.

Folgerung 3.5 *Sei X normierter Vektorraum. Ist X' separabel, so auch X.*

Beweis: Wähle eine dichte Folge ϕ_k in der Menge $\{\phi \in X' : \|\phi\| = 1\}$. Eine solche Folge ergibt sich, indem wir eine beliebige dichte Folge in X' normieren. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\phi_k(x_k) \geq \frac{1}{2}$. Angenommen es ist

$$V = \overline{\operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \overset{\neq}{\subset} X.$$

Nach Folgerung 3.1 gibt es dann ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_V = 0$ und $\|\phi\| = 1$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt $\phi_k \to \phi$ in X'. Es folgt

$$0 = \phi(x_k) = \phi_k(x_k) + (\phi - \phi_k)(x_k) \geq \frac{1}{2} - \|\phi - \phi_k\| > 0 \quad \text{für } k \text{ groß},$$

ein Widerspruch. $\square$

Beispiel 3.1 Beliebige disjunkte konvexe Mengen A, B können im allgemeinen nicht getrennt werden, das heißt die Voraussetzung A *offen* in Satz 3.3 kann nicht weggelassen werden. Sei A dichter Unterraum eines Banachraums X, und $B = \{x_0\}$ mit $x_0 \notin A$. Angenommen es gibt $\phi \in X'$ mit $\phi(x) < \phi(x_0)$ für alle $x \in A$. Da A dicht, folgt $\phi(x) \leq \phi(x_0)$ für alle $x \in X$ und hieraus $\phi = 0$, ein Widerspruch. Ein konkreter Fall wäre $A = C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zum Ende des Abschnitts wollen wir unser Studium von elliptischen Operatoren fortsetzen. Dazu brauchen wir noch eine Eigenschaft der Hölderräume.

Lemma 3.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einer Sehnenbogenbedingung. Für $u, v \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist auch $uv \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ und es gilt*

$$\|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \quad \textit{mit } C = C(k,\Omega).$$

Beweis: Durch Induktion über k. Für $k = 0$ schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
\frac{|(uv)(x) - (uv)(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \frac{|(u(x) - u(y))v(x) + u(y)(v(x) - v(y))|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq [u]_{\alpha,\Omega}\|v\|_{C^0(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}[v]_{\alpha,\Omega} \\
&\leq 2\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sei jetzt die Aussage für $l \leq k-1$ gezeigt. Dann gilt für $|\gamma| \leq k-1$

$$\begin{aligned}
\|\partial_i D^\gamma(uv)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \|D^\gamma\big((\partial_i u)v + u(\partial_i v)\big)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\
&\leq C(k-1,\Omega)\Big(\|\partial_i u\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\|\partial_i v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\Big) \\
&\leq C(k,\Omega)\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die Konstante hängt von der Sehnenbogenkonstante und vom Durchmesser von Ω ab. □

Wir betrachten den Operator L nun auf den Hölderräumen, also

$$L : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu. \tag{3.10}$$

Wie in (2.6) und (2.7) sollen die Koeffizienten eine $C^{0,\alpha}$-Schranke $\Lambda < \infty$ haben und die Elliptizitätsbedingung mit $\lambda > 0$ erfüllen. Aus Lemma 3.3 folgt dann eine Abschätzung

$$\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C\Lambda\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)},$$

das heißt L ist stetiger linearer Operator. Der Grund für den Übergang zu den Hölderräumen ist die a priori Abschätzung von Schauder, Satz 2.9. In $C_0^2(\overline{\Omega})$ gilt eine analoge a priori Abschätzung nicht, und auch das folgende Resultat wäre falsch (wie man zeigen kann).

Satz 3.4 *Das Bild des Operators L aus (3.10) ist abgeschlossen in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Beweis: Nach Folgerung 2.1 in Abschnitt 2 ist $\ker L$ endlichdimensional. Mit Hahn-Banach gibt es dann einen abgeschlossenen Unterraum $X \subset C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit

$$C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \ker L \oplus X \quad \text{(als Banachräume)},$$

siehe Aufgabe 3, Serie 5. Wir behaupten, dass eine Konstante $\mu > 0$ existiert mit

$$\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \geq \mu \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in X. \tag{3.11}$$

Andernfalls gibt es $u_k \in X$ mit

$$\|Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \frac{1}{k}\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Durch Normierung können wir $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = 1$ annehmen, und haben nach Übergang zu einer Teilfolge $u_k \to u$ in $C^0(\overline{\Omega})$ nach Satz 2.8. Mit Satz 2.9 folgt

$$\|u_k - u_l\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C\big(\|Lu_k - Lu_l\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_k - u_l\|_{C^0(\Omega)}\big) < \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ groß}.$$

Nach Satz 2.7 gilt $u_k \to u$ in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Nun gilt

$$\|Lu - Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \|u - u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \to 0.$$

Wegen $\|Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \frac{1}{k} \to 0$ folgt $Lu = 0$, also $u \in \ker L$. Da X abgeschlossen, gilt aber $u \in X$ und somit $u = 0$, im Widerspruch zu $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = 1$. Damit ist (3.11) bewiesen. Sei nun $f_k \in \operatorname{Bild} L$ mit $f_k \to f$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Es gibt dann $u_k \in X$ mit $Lu_k = f_k$, und mit (3.11) folgt

$$\|u_k - u_l\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\|f_k - f_l\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \to 0 \quad \text{mit } k, l \to \infty.$$

Nach Satz 2.7 folgt $u_k \to u$ in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Durch Grenzübergang ergibt sich $Lu = f$, also ist das Bild von L abgeschlossen. □

4 Das Kategorieprinzip von Baire

Definition 4.1 *Eine Teilmenge S eines metrischen Raums (X, d) heißt von zweiter Kategorie, falls S keine abzählbare Vereinigung von Mengen ist, die nirgends dicht sind. Dabei heißt A nirgends dicht genau wenn* $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Satz 4.1 (Kategorieprinzip von Baire) [11] *In einem vollständigen metrischen Raum X gilt für abgeschlossene Mengen A_k, $k \in \mathbb{N}$, die Implikation*

$$\operatorname{int} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \operatorname{int} A_k \neq \emptyset \quad \textit{für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Offene Mengen in X sind also von zweiter Kategorie.

Beweis: Angenommen es ist $\operatorname{int} A_k = \emptyset$ für alle k, aber $\operatorname{int} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ enthält eine offene Kugel B_0. Wir bestimmen für $k \geq 1$ induktiv Kugeln $B_k = B_{r_k}(x_k)$ mit $0 < r_k \leq \frac{1}{k}$, so dass

$$\overline{B_k} \subset B_{k-1} \backslash A_k.$$

Dies ist möglich, da $B_{k-1} \backslash A_k$ offen und nichtleer ist. Nach Konstruktion gilt $d(x_k, x_l) \leq \frac{1}{k}$ für $l \geq k$, also ist x_k eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in X$. Es folgt $x \in \overline{B_k}$ für alle $k \geq 1$, also $x \notin A_k$ für alle k. Aber $x \in \overline{B_1} \subset B_0$, ein Widerspruch. □

[11] R.L. Baire, 1874-1932

Lemma 4.1 *Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, Y normiert und $\mathcal{F} \subset C^0(X,Y)$ punktweise gleichmäßig beschränkt:*

$$S(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann gibt es eine (nichtleere) offene Kugel $B \subset X$ mit

$$\sup_{x \in B} S(x) < \infty.$$

Beweis: Die Mengen $A_k = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X : \|f(x)\| \leq k\}$ sind abgeschlossen. Es gilt $x \in A_k$ genau wenn $S(x) \leq k$, also $X = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Nach Satz 4.1 enthält ein A_k eine offene Kugel B, also gilt $S(x) \leq k$ für alle $x \in B$. □

Satz 4.2 (Banach-Steinhaus) [12] *Sei X ein Banachraum, Y normierter Raum und $\mathcal{F} \subset L(X,Y)$ sei punktweise gleichmäßig beschränkt:*

$$K(x) = \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt, also $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

Beweis: Nach Lemma 4.1 gibt es ein $x_0 \in X$, $\varrho > 0$ und $C < \infty$ mit $\|Tx\| \leq C$ für $\|x - x_0\| \leq \varrho$. Für $x \in X$ beliebig folgt

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\varrho} \big\|T\big(x_0 + \varrho \frac{x}{\|x\|}\big) - T(x_0)\big\| \leq \frac{2C}{\varrho} \|x\|.$$

Also gilt $\|T\| \leq \frac{2C}{\varrho}$. □

Eine sehr wichtige Anwendung ist die

Folgerung 4.1 *Sei X ein Banachraum. Die Folge $\phi_k \in X'$ konvergiere schwach gegen $\phi \in X'$, das heißt*

$$\phi_k(x) \to \phi(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist die Folge ϕ_k in X' beschränkt, also $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty$.

Beweis: Schwache Konvergenz der ϕ_k bedeutet punktweise Konvergenz. Also ist für jedes $x \in X$ die Folge $\phi_k(x)$ beschränkt, und nach Satz 4.2 ist dann auch die Folge $\|\phi_k\|$ beschränkt. □

Wir werden uns mit der schwachen Konvergenz noch ausführlich beschäftigen. Eine zweite Anwendung ist

Beispiel 4.1 Sei $B : Y \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung zwischen Banachräumen. Ist B in jedem Argument stetig, so ist B insgesamt stetig.

Satz 4.3 (von der offenen Abbildung) *Seien X, Y Banachräume. Ist $T \in L(X,Y)$ surjektiv, so ist T offen, das heißt*

$$\Omega \subset X \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad T(\Omega) \subset Y \text{ offen}.$$

[12] Englisch: uniform boundedness principle

Bemerkung. Ist umgekehrt T offen, so folgt $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ bzw. $B_R(0) \subset T(B_{\frac{R}{\delta}}(0)$, das heißt T ist surjektiv.

Beweis: **Schritt 1** $\overline{T(B_1(0))} \supset B_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$.
Nach Voraussetzung gilt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(B_k(0)).$$

Nach Baire, Satz 4.1, gibt es dann ein $y_0 \in Y$, $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\overline{T(B_k(0))} \supset B_\varepsilon(y_0)$. Also gibt es zu jedem $\eta \in B_\varepsilon(0) \subset Y$ eine Folge $x_j \in B_k(0)$ mit $T(x_j) \to y_0 + \eta$. Wähle noch $\xi_j \in B_k(0)$ mit $T(\xi_j) \to y_0$. Dann folgt

$$T(\underbrace{\frac{x_j - \xi_j}{2k}}_{\in B_1(0)}) = \frac{1}{2k}(T(x_j) - T(\xi_j)) \to \frac{1}{2k}\eta \quad \text{ mit } j \to \infty.$$

Dies zeigt $\overline{T(B_1(0))} \supset B_{\frac{1}{2k}}(0) =: B_\delta(0)$.

Schritt 2 $B_\delta(0) \subset T(\overline{B_2(0)}) \subset T(B_3(0))$.
Es ist nur die erste Inklusion zu zeigen; sei dazu $y_0 \in B_\delta(0)$ gegeben. Setze $x_0 = 0$ und konstruiere $x_0, x_1, \ldots$ durch folgende Iteration: ist x_k schon bestimmt mit $\|y_0 - Tx_k\| < 2^{-k}\delta$, so wähle $\xi_k \in B_{2^{-k}}(0)$ mit $\|(y_0 - Tx_k) - T\xi_k\| < 2^{-k-1}\delta$ und setze $x_{k+1} = x_k + \xi_k$. Nach Schritt 1 ist diese Wahl immer möglich. Wegen $\|x_{k+1} - x_k\| < 2^{-k}$ konvergiert die Folge x_k gegen ein $x \in \overline{B_2(0)}$, und es folgt $Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_k = y_0$. Es folgt nun $T(B_r(x_0)) \supset B_{\frac{\delta r}{3}}(T(x_0))$, und die Offenheit von T ist bewiesen. □

Der nächste Satz garantiert die Stetigkeit der inversen Abbildung. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, insofern liefert der Satz ein gutes Resultat. Am Beispiel des Dirichletproblems sehen wir allerdings, dass die vorausgesetzte Bijektivität schwer zu zeigen ist; es werden dazu a priori Abschätzungen benötigt, aus denen die Stetigkeit der Inversen dann sowieso folgt.

Satz 4.4 (Satz von der inversen Abbildung) *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ bijektiv. Dann ist T invertierbar, das heißt T^{-1} ist stetig.*

Beweis: Mit Satz 4.3 gilt $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ für ein $\delta > 0$, also $T^{-1}(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$ oder $T^{-1}(B_1(0)) \subset B_{\frac{1}{\delta}}(0)$, das heißt $\|T^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$. □

Beispiel 4.2 Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ vollständige Normen auf dem Vektorraum X. Dann gilt

$$\sup_{\|x\|_1 \le 1} \|x\|_2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|x\|_1 < \infty.$$

Betrachte dazu $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ und wende Satz 4.4 an.

Satz 4.5 (vom abgeschlossenen Graphen) *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ sei linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Der Unterraum $G_T = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \oplus Y$ ist abgeschlossen.*

(2) *T ist stetig.*

Beweis: Ist T stetig und $(x_k, Tx_k) \to (x,y)$, so folgt $y = \lim_{k\to\infty} Tx_k = Tx$. Sei umgekehrt G_T abgeschlossen, also Banachraum mit der induzierten Norm auf $X \oplus Y$. Die Projektion $P_X : G_T \to X$ ist stetig und bijektiv. Nach Satz 4.4 ist dann auch $P_X^{-1} : X \to G_T$ stetig, und somit auch $T = P_Y P_X^{-1} : X \to Y$. □

Satz 4.6 (von der direkten Summe) *Der Banachraum Z sei algebraische direkte Summe der Unterräume X und Y. Sind X, Y abgeschlossene Unterräume, so ist*

$$T : X \oplus Y \to Z,\, T(x,y) = x + y,$$

stetig invertierbar, und die Projektionen $P_Y : X \to Y$, $P_Z : X \to Z$ sind stetig.

Beweis: X, Y sind Banachräume mit der induzierten Norm, also ist auch $X \oplus Y$ Banachraum. T ist nach Voraussetzung bijektiv und es gilt

$$\|T(x,y)\|_Z = \|x+y\|_Z \leq 2\max(\|x\|_X, \|y\|_Y) = 2\|(y,z)\|_{X\oplus Z}.$$

Nach Satz 4.4 ist dann auch $T^{-1} : Z \to X \oplus Y$ stetig. □

5 Hilbertraumtheorie

Definition 5.1 *Ein Skalarproduktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über $\mathbb{R}$ heißt Hilbertraum, wenn er bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständig ist.*

Beispiel: ist μ äußeres Maß auf X, so ist $L^2(\mu)$ Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mu)} = \int_X fg\, d\mu$$

Weiter unten werden wir als weiteres Beispiel den Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ kennen lernen. Es spielen auch Hilberträume über $\mathbb{C}$ eine Rolle, zum Beispiel in der Quantenmechanik. Die Unterschiede zum reellen Fall sind aber nicht so groß, soweit es unsere Analysis betrifft, aus Zeitgründen bleiben wir deshalb im Reellen.

Satz 5.1 (Darstellungssatz von Riesz) *Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $\phi \in X'$ genau ein $x_0 \in X$ mit der Darstellungseigenschaft*

$$\phi(x) = \langle x, x_0\rangle \quad \text{für alle } x \in X. \tag{5.12}$$

Es gilt $\|x_0\| = \|\phi\|$, also ist die Abbildung $\mathcal{R} : X \to X'$, $\mathcal{R}x_0(x) = \langle x, x_0\rangle$, eine Isometrie.

Zusatz. *x_0 ist die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \phi(x)$.*

Beweis: Wir zeigen folgende Aussagen:

(a) Eine Minimalstelle x_0 von Q_ϕ ist Lösung von (5.12).

(b) Es gibt eine Minimalstelle x_0 von Q_ϕ.

(c) Für eine Lösung x_0 von (5.12) gilt $\|x_0\| = \|\phi\|$.

Zu (a): Ist x_0 Minimalstelle von Q_ϕ, so folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} Q_\phi(x_0 + \varepsilon x)|_{\varepsilon=0} = \langle x, x_0 \rangle - \phi(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Zu (b): Q_ϕ ist nach unten beschränkt, genauer gilt

$$Q_\phi(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|\phi\|\,\|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| - \|\phi\|)^2 - \frac{1}{2}\|\phi\|^2 \geq -\frac{1}{2}\|\phi\|^2.$$

Es folgt $\lambda := \inf_{x\in X} Q_\phi(x) \geq -\frac{1}{2}\|\phi\|^2 > -\infty$. Sei nun $x_k \in X$ eine Minimalfolge, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|x_k - x_l\|^2 &= \|x_k\|^2 + \|x_l\|^2 - \frac{1}{2}\|x_k + x_l\|^2 \\
&= 2Q_\phi(x_k) + 2Q_\phi(x_l) - 4Q_\phi\big(\frac{x_k + x_l}{2}\big) \\
&\leq 2Q_\phi(x_k) + 2Q_\phi(x_l) - 4\lambda \\
&< \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ hinreichend groß.}
\end{aligned}$$

Somit existiert $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$. Da Q_ϕ stetig ist, folgt $Q_\phi(x_0) = \lim_{k\to\infty} Q_\phi(x_k) = \lambda$.

Zu (c): einerseits gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\|\phi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \phi(x) = \sup_{\|x\|\leq 1} \langle x, x_0 \rangle \leq \|x_0\|,$$

andererseits folgt durch *Testen mit* x_0

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \phi(x_0) \leq \|\phi\|\,\|x_0\|.$$

Insbesondere folgt aus $\phi = 0$ auch $x_0 = 0$, dies impliziert die Eindeutigkeit. □

Folgerung 5.1 *Ein Hilbertraum X ist reflexiv, das heißt die Abbildung $J_X : X \to X''$, $J_X(x)(\phi) = \phi(x)$, ist surjektiv (sogar eine Isometrie).*

Beweis: Nach Satz 5.1 ist $\|\phi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \phi(x)$ die Norm des Skalarprodukts

$$\langle \phi, \psi \rangle_{X'} := \langle \mathcal{R}_X^{-1}\phi, \mathcal{R}_X^{-1}\psi \rangle_X,$$

insbesondere ist X' ebenfalls Hilbertraum. Es gilt nun $J_X = \mathcal{R}_{X'} \circ \mathcal{R}_X$, denn

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{X'}(\mathcal{R}_X x)(\phi) &= \langle \mathcal{R}_X x, \phi \rangle_{X'} = \langle \mathcal{R}_X^{-1}\mathcal{R}_X x, \mathcal{R}_X^{-1}\phi \rangle_X = \langle x, \mathcal{R}_X^{-1}\phi \rangle_X \\
&= \mathcal{R}_X(\mathcal{R}_X^{-1}\phi)(x) = \phi(x) = J_X x(\phi).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.1. □

Definition 5.2 *Sei X Hilbertraum. Das orthogonale Komplement einer Menge $M \subset X$ ist*

$$M^\perp = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \quad \textit{für alle } y \in M\}.$$

$M^\perp$ ist stets abgeschlossener Unterraum von X.

Folgerung 5.2 (Projektionssatz) *Ist Y ein abgeschlossener Umterraum des Hilbertraums X, so gilt $X = Y \oplus Y^\perp$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist Y mit dem induzierten Skalarprodukt selbst ein Hilbertraum. Für $x \in X$ betrachte $\phi \in Y'$, $\phi(y) = \langle x, y \rangle$. Nach Satz 5.1 gibt es ein $y_0 \in Y$ mit

$$\phi(y) = \langle y_0, y \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x - y_0, y \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Also ist $x = y_0 + (x - y_0) \in Y \oplus Y^\perp$. $\square$

Bemerkungen:

a) Sei y_0 wie im Beweis von Folgerung 5.2. Dann haben wir für jedes $y \in Y$ die Gleichung

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2,$$

das heißt y_0 ist der eindeutige nächste Punkt zu x in Y. Wählen wir hier $y = 0$, so folgt $\|y_0\| \leq \|x\|$, also hat die Projektion auf Y die Norm Eins (außer wenn $Y = \{0\}$).

b) Ist Y nicht abgeschlossen, so gilt der Projektionssatz nicht, denn aus $X = Y \oplus Y^\perp$ folgt $Y = (Y^\perp)^\perp$. Ein Beispiel ist $Y = C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) = X$, in diesem Fall ist $Y^\perp = \{0\}$ nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung.

c) Sei X Banachraum und $\phi \in X'$, $\phi \neq 0$. Ist $x_0 \in X$ mit $\phi(x_0) \neq 0$, so gilt die direkte Summe $X = \ker \phi \oplus \mathbb{R}x_0$, denn jedes $x \in X$ hat die Zerlegung

$$x = x - \lambda x_0 + \lambda x_0 \quad \text{mit } \lambda = \phi(x)/\phi(x_0).$$

Ist X Hilbertraum, so wähle $x_0 \in X$ wie in Satz 5.1. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= \langle x_0, x_0 \rangle \neq 0 \quad \text{da } \phi \neq 0, \\ \langle y, x_0 \rangle &= \phi(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \ker \phi. \end{aligned}$$

Die Summe $X = \ker \phi \oplus \mathbb{R}x_0$ ist dann zusätzlich orthogonal.

Folgerung 5.3 (Hilbertraumadjungierte) *Seien X, Y Hilberträume über $\mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $T \in L(X, Y)$ genau ein $T^* \in L(Y, X)$ mit*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \textit{für alle } x \in X, y \in Y.$$

Es gilt $\|T^*\| = \|T\|$.

Beweis: Setze $\phi_y(x) = \langle Tx, y \rangle$. Es gilt $|\phi_y(x)| \leq \|T\| \|y\| \|x\|$, insbesondere $\phi_y \in X'$. Bezeichne mit $T^*(y) \in X$ das eindeutige Element mit

$$\langle Tx, y \rangle = \phi_y(x) = \langle x, T^*(y) \rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

Da ϕ_y linear von y abhängt, ist auch $T^* : Y \to X$ linear, und mit Cauchy-Schwarz gilt

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T^* y\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, T^* y \rangle \leq \|T\|.$$

Nun ist $(T^*)^* = T$, also gilt $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Im zweiten Teil des Kapitels geht es um die Anwendung der Hilbertraum-Theorie auf elliptische Randwertprobleme. Bei der Methode spielt der Begriff der verallgemeinerten oder schwachen Ableitung eine zentrale Rolle.

Definition 5.3 (schwache Ableitung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwache Ableitung von $u(x)$ nach der Variablen x_i, falls gilt:*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = -\int_\Omega g\varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Notation: $\partial_i u = g$ *schwach.*

Wir machen zwei Bemerkungen:

(1) *Eindeutigkeit:* Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt, falls existent. Denn ist die Definition für g_1 und g_2 erfüllt, so folgt

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\varphi = -\int_\Omega u\partial_i\varphi + \int_\Omega u\partial_i\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt $g_1 = g_2$. Ist $u \in C^1(\Omega)$, so ist u auch schwach differenzierbar, die schwachen Ableitungen $\partial_i u$ sind die klassischen Ableitungen.

(2) *Linearität:* Sind $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwach nach x_i differenzierbar, so auch $\alpha u + \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; und zwar gilt $\partial_i(\alpha u + \beta v) = \alpha\partial_i u + \beta\partial_i v$. Denn wir berechnen für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\alpha u + \beta v)\partial_i\varphi &= \alpha \int_\Omega u\partial_i\varphi + \beta\int_\Omega v\partial_i\varphi \\ &= -\alpha\int_\Omega (\partial_i u)\varphi - \beta\int_\Omega(\partial_i v)\varphi \\ &= -\int_\Omega (\alpha\partial_i u + \beta\partial_i v)\varphi.\end{aligned}$$

Beispiel 5.1 Wir geben ein Beispiel einer schwach, aber nicht klassisch differenzierbaren Funktion, und zwar betrachten wir für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),\ u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $u(x)$ schwache Ableitungen auf $\mathbb{R}^n$? Auf $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist $u(x)$ glatt, die schwache Ableitung muss dort die klassische sein:

$$\partial_i u(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{x_i}{|x|} =: g_i(x) \quad \text{für } x \neq 0.$$

Damit ist die schwache Ableitung schon fast überall bestimmt. Für $\alpha > 1 - n$ sind die g_i auf $\mathbb{R}^n$ lokal integrierbar. Wir vermuten daher, dass $u(x)$ genau für $\alpha > 1 - n$ schwach differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^n$. Sei dazu $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u\,\partial_i\varphi &= \lim_{\varrho\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_\varrho(0)} (\partial_i(u\varphi) - (\partial_i u)\varphi) \\ &= \lim_{\varrho\searrow 0}\Big(-\underbrace{\int_{\partial B_\varrho(0)} u\varphi\langle e_i, \nu\rangle\, d\mu}_{\leq C\varrho^{n-1+\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_\varrho(0)} g_i\varphi\Big) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} g_i\varphi.\end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich $\partial_i u = g_i$ schwach für $\alpha > 1 - n$.

Definition 5.4 (Sobolevräume) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \text{ für } i = 1, \ldots, n\},$$

mit der zugehörigen $W^{1,p}$-Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Analog werden auch die lokalen Sobolevräume $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ erklärt.

Satz 5.2 *$W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Ist u_k eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$, so sind u_k sowie $\partial_i u_k$ Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$. Nach Fischer-Riesz gilt dann $u_k \to u$, $\partial_i u_k \to g_i$ in $L^p(\Omega)$. Für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ folgt

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \partial_i \varphi = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\partial_i u_k)\varphi = \int_\Omega g_i \varphi.$$

Also gilt $\partial_i u = g_i$ schwach, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. □

Es ist eine wichtige Tatsache, dass Sobolevfunktionen im Fall $p < \infty$ durch glatte Funktionen approximiert werden können. Wir erinnern kurz an das Verfahren der Glättung. Fixiere einen Glättungskern $\eta \in C^\infty_c(B_1(0))$, $\eta \geq 0$, mit $\int \eta(x)\,dx = 1$. Reskaliere mit $\eta^\varrho(x) = \varrho^{-n}\eta(\frac{x}{\varrho})$, und definiere für $u \in L^p(\Omega)$

$$(\eta^\varrho * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varrho(x-y)u(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)u(x-\varrho z)\,dz \quad \text{für } x \in \Omega_\varrho.$$

Für $x \in \Omega_\varrho = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varrho\}$ ist das Faltungsintegral definiert, denn $x - \varrho z \in \Omega$ für $|z| \leq 1$. Ist $u \in C^0(\Omega)$, so konvergiert $\eta^\varrho * u$ lokal gleichmäßg gegen u in Ω. Für $p < \infty$ können Funktionen $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ durch stetige Funktionen lokal in L^p approximiert werden, daraus folgt $\eta^\varrho * u$ lokal (i.e. auf kompakten Teilmengen von Ω) in L^p.

Lemma 5.1 (Glättung von Sobolevfunktionen) *Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:*

(1) *$\partial_i(\eta^\varrho * u) = \eta^\varrho * \partial_i u$ auf Ω_ϱ (links steht die klassische Ableitung).*

(2) *Für $p < \infty$ gilt $\eta_\varrho * u \to u$ lokal auf Ω in $W^{1,p}$.*

Beweis: (2) folgt aus (1) wegen der L^p_{loc}-Konvergenz, siehe oben. Für (1) berechne

$$\begin{aligned}
\partial_i(\eta^\varrho * u)(x) &= \int \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\eta^\varrho(x-y)\Big)u(y)\,dy \\
&= -\int \Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\eta^\varrho(x-y)\Big)u(y)\,dy \\
&= \int \eta^\varrho(x-y)\partial_i u(y)\,dy \\
&= (\eta^\varrho * \partial_i u)(x).
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.2 (Lokalisierung von Sobolevfunktionen) *Seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\eta \in C^1_c(\Omega)$. Dann ist $u\eta \in W^{1,p}(\Omega)$ und es gilt die Produktregel*

$$\partial_i(u\eta) = (\partial_i u)\eta + u(\partial_i \eta).$$

Beweis: Wir berechnen für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\int_\Omega u\eta\,\partial_i\varphi = \int_\Omega u\partial_i(\eta\varphi) - \int_\Omega u(\partial_i\eta)\varphi = -\int_\Omega \big[(\partial_i u)\eta + u(\partial_i\eta)\big]\varphi.$$

Hier wurde benutzt, dass die schwache Ableitung $\partial_i u$ auch mit $C^1_c(\Omega)$-Funktionen getestet werden kann, in diesem Fall mit $\eta\varphi$. Das folgt durch Approximation mit C^∞_c-Funktionen durch Glättung. $\square$

Satz 5.3 (Meyers-Serrin) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $1 \leq p < \infty$. Dann ist der Raum $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis: Betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die offenen Mengen $U_k = \{x \in \Omega : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{k-1}\}$. Es gilt $U_k \subset\subset \Omega$ und die U_k bilden eine lokal-endliche Überdeckung, da $\operatorname{dist}(U, \partial\Omega) > 0$ für $U \subset\subset \Omega$. Sei $\varphi_k \in C^\infty_c(U_k)$ eine untergeordnete Teilung der Eins, also $0 \leq \varphi_k \leq 1$ und $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k = 1$ auf Ω. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann $\varrho_k = \varrho_k(\varepsilon) > 0$, so dass für $u_k = \eta^{\varrho_k} * (\varphi_k u)$ gilt:

$$\|u_k - \varphi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2^{-k}\delta \quad \text{und} \quad \operatorname{spt} u_k \subset V_k.$$

Für $v = \sum_{k=1}^\infty u_k$ folgt $\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^\infty \|u_k - \chi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \delta$. $\square$

Bezeichne mit $H^{1,p}(\Omega)$ die Vervollständigung des Raums $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$ bezüglich der $W^{1,p}(\Omega)$-Norm. Jedes Element von $H^{1,p}(\Omega)$ ist durch eine $W^{1,p}$-Cauchyfolge von glatten Funktionen repräsentiert, siehe Satz 1.1. Zwei Cauchyfolgen sind äquivalent, wenn ihre Differenz eine $W^{1,p}(\Omega)$-Nullfolge ist. Da $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig ist, erhalten wir eine isometrische Einbettung

$$H^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega),\ [(u_k)_{k\in\mathbb{N}}] \mapsto W^{1,p}\text{-}\lim_{k\to\infty} u_k.$$

Nach Satz 5.3 ist diese Einbettung sogar surjektiv, also sind $H^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ isometrisch isomorph. Wir hätten die Sobolevräume für $p < \infty$ somit direkt als Vervollständigung einführen können. Der Umgang mit Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen wäre aber enorm unpraktisch. Bei der Definition der reellen Zahlen kann das vermieden werden, weil eine axiomatische Beschreibung vorliegt; auf diese stützt sich die Analysis-Grundvorlesung. Hier ist es wichtig, die punktweisen Repräsentanten zur Verfügung zu haben. Im übrigen ist die schwache Ableitung ein zentraler Begriff in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Wir kommen jetzt zum Randwertproblem auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Es ist nicht klar, ob und wie Randwerte einer Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiert werden können. Denn der Rand ist eine Nullmenge, jedenfalls wenn Ω ein C^1-Gebiet ist, und Sobolevfunktionen sind nur fast überall Äquivalenzklassen. Für die allgemeine Definition von Randwerten verweisen wir auf H.W. Alt [**?**]. Die folgende Definition beschreibt Funktionen mit verallgemeinerten Randwerten Null.

Definition 5.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $1 \leq p < \infty$. Wir bezeichnen mit $W_0^{1,p}(\Omega)$ den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, und $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es bei Testen mit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ keinen Randterm:

$$\int_\Omega u\partial_i\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k\partial_i\varphi = -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \partial_i u_k\,\varphi = -\int_\Omega \partial_i u\,\varphi.$$

Wir kommen nun zur Formulierung des Randwertproblems. Betrachte für gegebene Koeffizienten $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq n$, den Differentialoperator

$$L : C^2(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega}),\; Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u). \tag{5.13}$$

Im Spezialfall $a^{ij} = \delta_{ij}$ ist $L = -\Delta$ der (negative) Laplaceoperator. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ gegeben. Wir interessieren uns für eine Lösung u des Dirichletproblems

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \tag{5.14}$$

Wir suchen eine Formulierung des Problems, die mit Hilbertraumtheorie gelöst werden kann. Multiplikation der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und partielle Integration liefert

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Diese Gleichung ist schon sinnvoll, wenn die $\partial_i u$ schwache Ableitungen in $L^2(\Omega)$ sind. Um die Nullrandwerte zu realisieren, wählen wir den Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ und erhalten den schwach definierten Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\; (Lu)(\varphi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j\varphi. \tag{5.15}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ergibt das Funktional

$$\phi_f \in W_0^{1,2}(\Omega)',\; \phi_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi.$$

Insgesamt folgt die schwache Formulierung des Randwertproblems

$$Lu = \phi_f \quad \text{für } u \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{5.16}$$

Umgekehrt folgt für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ aus der schwachen Formulierung die klassische Version. Denn die partielle Integration kann rückgängig gemacht werden, das Fundamentallemma der Variationsrechnung impliziert dann $Lu = f$. Außerdem gilt nach Gauß

$$\int_{\partial\Omega} u\varphi\langle e_i,\nu\rangle\,d\mu = \int_\Omega \partial_i(u\varphi) = 0.$$

Mit einer Variante des Fundamentallemmas folgt $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zusammengefasst ist die schwache Version für reguläre Funktionen äquivalent zur klassischen Version, aber sie ist im

Hilbertraumkontext formuliert.

Eine Lösung der schwachen Gleichung ist nur eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Um zu zeigen, dass auch das klassische Problem gelöst wird, muss die Regularität von $u(x)$ im Inneren und am Rand von Ω bewiesen werden. Das ist ein nichttrivialer Schritt, der in den partiellen Differentialgleichungen behandelt wird. Wir beschränken uns hier auf die schwache Lösung.

Als erstes stellen wir fest, dass der schwache Operator L definiert und stetig ist, und zwar gilt mit einer geeigneten Konstanten $M < \infty$

$$|Lu(\varphi)| \le M\|Du\|_{L^2(\Omega)}\|D\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le M\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{5.17}$$

Mit $a = (a^{ij})$ kann $M = \| \, |a| \, \|_{L^\infty(\Omega)}$ gewählt werden, denn nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i u \, \partial_j\varphi\Big)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^n \partial_i u \sum_{j=1}^n a^{ij}\partial_j\varphi\Big)^2 \\ &\le |Du|^2 \sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n a^{ij}\partial_j\varphi\big)^2 \\ &\le |Du|^2 \, |D\varphi|^2 \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a^{ij})^2. \end{aligned}$$

Auch das lineare Funktional ϕ_f ist definiert und stetig für $f \in L^2(\Omega)$, und zwar gilt

$$\phi_f(\varphi) \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.18}$$

Um zu einem lösbaren Problem zu kommen, müssen die Koeffizienten a^{ij} eine wesentliche Strukturbedingung erfüllen.

Definition 5.6 (Elliptizität) *Der Operator $Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u)$ heißt elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$, wenn für fast alle $x \in \Omega$ gilt:*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2 \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.19}$$

Zum Beispiel ist der Operator $Lu = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u$ für $u = u(x,t)$ nicht elliptisch. Eine Lösung von $Lu = 0$ modelliert die Amplitude einer eindimensionalen Welle, als Funktion des Orts x und der Zeit t. Man kann überlegen, dass das Dirichletproblem für die Wellengleichung nicht immer lösbar ist.

Satz 5.4 (Poincaré-Ungleichung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $d = \operatorname{diam}(\Omega)$. Für $1 \le p < \infty$ gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le d\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis: Wir können $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ annehmen mit $\operatorname{spt} u \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_n \le d\}$. Für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0,d]$ folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$|u(x',x_n)|^p = \Big|\int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',z)\,dz\Big|^p \le d^{p-1}\int_0^d \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|^p(x',z)\,dz.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^d |u(x',x_n)|^p\,dx_n\,dx'\\ &\le d^{p-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^d\int_0^d \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|^p(x',z)\,dz\,dx_n\,dx'\\ &= d^p\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^d \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|^p(x',z)\,dz\,dx'\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|^p\,dx.\end{aligned}$$

□

Satz 5.5 (Lösung des Dirichletproblems) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und*

$$L: W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Lu(\varphi) = A(u,\varphi) \quad \text{mit } A(u,\varphi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u \partial_j \varphi.$$

Dabei sei $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$. Dann ist L beschränkt invertierbar, und es gilt die Abschätzung

$$\|L^{-1}\| \le \frac{2(d^2+1)}{\lambda} \quad \text{wobei } d = \operatorname{diam}(\Omega). \tag{5.20}$$

Zusatz. *Die schwache Lösung von $Lu = \phi$ ist die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $Q_\phi(u) = \frac{1}{2}A(u,u) - \phi(u)$.*

Beweis: Aus der Elliptizität und mit (5.17) folgt

$$\lambda\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \le A(u,u) \le M\|Du\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Nun ist $\|u\|^2_{W^{1,2}} \le 2(\|u\|^2_{L^2} + \|Du\|^2_{L^2}) \le 2(d^2+1)\|Du\|^2_{L^2}$ nach Satz 5.4, also

$$\mu\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \le A(u,u) \le M\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \text{mit } \mu = \frac{\lambda}{2(d^2+1)}.$$

Damit ist $A(u,u)$ ein Skalarprodukt auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit äquivalenter Norm $\|u\|_A = A(u,u)^{1/2}$. Nach Riesz, Satz 5.1, gibt es zu $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ genau ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$A(u,\varphi) = \phi(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

u ist eindeutige Lösung von $Lu = \phi$, und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \le \frac{1}{\mu}Lu(u) = \frac{1}{\mu}\phi(u) \le \frac{1}{\mu}\|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)'}\,\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Dies zeigt $\|L^{-1}\| \le \frac{1}{\mu} = \frac{2(d^2+1)}{\lambda}$. □

Um auch den Fall zu behandeln, wenn die Koeffizientenmatrix nicht symmetrisch ist, brauchen wir eine geringfügige Verallgemeinerung des Satzes von Riesz, den Satz von Lax und Milgram.

Lemma 5.3 (Darstellung von Bilinearformen) *Sei X Hilbertraum, und $B : X \times X \to \mathbb{R}$ sei stetige Bilinearform auf X, das heißt*

$$\|B\| = \sup_{\|u\|,\|v\| \le 1} |B(u,v)| < \infty.$$

Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X,X)$ mit

$$B(u,v) = \langle u, Tv \rangle \quad \textit{für alle } u, v \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|B\|$.

Beweis: Die Eindeutigkeit von T ist klar. Für die Existenz betrachte, für $v \in X$ fest, das Funktional $B(\cdot, v)$. Erhalte mit Satz 5.1 eine wohldefinierte Abbildung $T : X \to X$ mit

$$B(u,v) = \langle u, T(v) \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Man sieht leicht, dass T linear ist. Mit $u = Tv$ für $\|v\| \le 1$ folgt

$$\|Tv\|^2 = B(Tv, v) \le \|B\| \, \|Tv\|,$$

also $\|T\| \le \|B\|$. Die Ungleichung $\|B\| \le \|T\|$ ist offensichtlich. □

Satz 5.6 (Lax-Milgram) *Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ Bilinearform auf dem Hilbertraum X mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *B ist stetig: es gibt ein $M < \infty$ mit $|B(u,v)| \le M\|u\|\|v\|$ für alle $u, v \in X$.*

(2) *B ist koerziv: es gibt ein $\mu > 0$ mit $B(u,u) \ge \mu\|u\|^2$ für alle $u \in X$.*

Dann ist der Operator $L : X \to X'$, $(Lu)(v) = B(u,v)$, invertierbar, und es gilt

$$\|L^{-1}\| \le \frac{1}{\mu}. \tag{5.21}$$

Ist B symmetrische Bilinearform, so ist die Lösung von $Lu = \phi$ die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - \phi(v)$.

Beweis: Durch Testen mit u folgt aus der Koerzivität

$$\mu\|u\|^2 \le B(u,u) = Lu(u) \le \|Lu\| \, \|u\|,$$

das heißt $\|u\| \le \frac{1}{\mu}\|Lu\|$. Insbesondere ist L injektiv. Sobald zusätzlich die Surjektivität von L bewiesen ist, folgt außerdem die Abschätzung (5.21).

Ist B symmetrische Bilinearform, so ist $B(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum X mit äquivalenter Norm, genauer gilt

$$\sqrt{\mu}\|u\| \le \|u\|_B = \sqrt{B(u,u)} \le \sqrt{M}\|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Die Surjektivität von L folgt dann direkt aus Satz 5.1. Im Fall B nicht symmetrisch wähle $T \in L(X,X)$ mit $B(u,v) = \langle u, Tv \rangle$, siehe Lemma 5.3. Es gilt dann

$$\mu\|u\|^2 \le B(u,u) = \langle u, Tu \rangle \le \|u\| \, \|Tu\|,$$

also $\|Tu\| \geq \mu\|u\|$. Betrachte nun die Bilinearform $A(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle$. Es gilt $\|A\| \leq \|T\|^2 = \|B\|^2$ nach Lemma 5.3, sowie

$$A(u,u) = \|Tu\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Wie gezeigt ist $K : X \to X'$, $(Ku)(v) = A(u,v)$, beschränkt invertierbar. Aber

$$(Ku)(v) = A(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle = B(Tu, v) = L(Tu)(v).$$

Dies zeigt $LT = K$, also ist auch L surjektiv. □

Wir erhalten insgesamt folgenden Existenzsatz.

Satz 5.7 (Lösung des Dirichletproblems) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und*

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Lu(v) = B(u,v) \quad \textit{mit } B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u \partial_j v.$$

Dabei sei $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ elliptisch mit $\lambda > 0$. Dann ist L beschränkt invertierbar, und

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{d^2+1}{\lambda} \quad \textit{wobei } d = \mathrm{diam}\,(\Omega).$$

Zusatz. *Die Lösung von $Lu = \phi$ ist die eindeutige Minimalstelle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Funktionals $Q_\phi(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - \phi(u)$.*

Beweis: $B(u,v)$ stetig und koerziv mit Konstante $\mu = \frac{\lambda}{2(d^2+1)}$, die Behauptung folgt somit aus Satz 5.6. □

6 Die Dualräume der L^p-Räume

In diesem Abschnitt bezeichnet μ stets ein äußeres Maß auf der Menge X. Für μ-messbare Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ haben wir dann

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \begin{cases} \Big(\int_X |u(x)|^p\,d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{s > 0 : \mu(\{f > s\}) = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases} \tag{6.22}$$

Sei $\mathcal{N}$ der Raum aller Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ mit $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. Die L^p-Räume sind

$$L^p(\mu) = \{u\ \mu\text{-messbar} : \|u\|_{L^p(\mu)} < \infty\}/\mathcal{N}. \tag{6.23}$$

Da sich äquivalente Funktionen nur auf einer Nullmenge unterscheiden, ist $\|u\|_{L^p(\mu)}$ auf dem Quotienten wohldefiniert, und ist eine Norm nach der Ungleichung von Minkowski. In Analysis III wird gezeigt:

Satz 6.1 (Fischer-Riesz) *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\mu)$ mit Norm $\|u\|_{L^p(\mu)}$ ein Banachraum.*

Lemma 6.1 *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und μ sei ein äußeres Maß auf X, σ-endlich im Fall $p = 1$. Für $1 \leq q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist dann die Abbildung*

$$I_q : L^q(\mu) \to L^p(\mu)',\ (I_q v)(u) = \int_X uv\,d\mu, \tag{6.24}$$

eine isometrische Injektion.

Bemerkung. $L^2(\mu)$ ist Hilbertraum, und I_2 ist die Rieszabbildung $\mathcal{R}$ aus Kapitel 5.

BEWEIS: Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$|I_q v(u)| = \Big| \int_X uv\,d\mu \Big| \leq \|u\|_{L^p(\mu)} \|v\|_{L^q(\mu)},$$

also $I_q v \in L^p(\mu)'$ mit Norm $\|I_q v\| \leq \|v\|_{L^q(\mu)}$. Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen.

Fall 1: $1 < p \leq \infty$.
Wir setzen $S^q(\mu) = \{u \in L^q(\mu) : \|u\|_{L^q(\mu)} = 1\}$ und betrachten die Abbildung

$$T_q : S^q(\mu) \to S^p(\mu),\ T_q(v) = \operatorname{sign}(v)|v|^{q-1}. \tag{6.25}$$

Sei $v \in S^q(\mu)$ gegeben. Für $p < \infty$ ist $(q-1)p = q$, und mit $u = T_q(v)$ folgt

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \Big(\int_X |T_q(v)|^p\,d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_X |v|^q\,d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = 1. \tag{6.26}$$

Für $p = \infty$ ist $T_q(v) = \operatorname{sign}(v)$, also ebenfalls

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \|\operatorname{sign}(v)\|_{L^\infty(\mu)} = 1. \tag{6.27}$$

Aber nun liefert Testen mit $u = T_q(v)$

$$I_q v(u) = \int_X \operatorname{sign}(v)|v|^{q-1} v\,d\mu = \int_X |v|^q\,d\mu = 1 = \|u\|_{L^p(\mu)},$$

also $\|I_q v\| \geq 1 = \|v\|_{L^q(\mu)}$ und insgesamt $\|I_q v\| = \|v\|_{L^q(\mu)}$.

Fall 2: $p = 1$
Nach Voraussetzung ist $X = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ mit E_j μ-messbar, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ und $\mu(E_j) < \infty$. Sei $v \in L^\infty(\mu)$ mit $\|v\|_{L^\infty(\mu)} = 1$ gegeben. Wir betrachten für $\theta < 1$ die Mengen $E_{j,\theta} = \{x \in E_j : v(x) > \theta\}$, also $\{v > \theta\} = \bigcup_{j=1}^\infty E_{j,\theta}$. Es folgt

$$0 < \mu(\{v > \theta\}) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_{j,\theta}).$$

Berechne nun für $u = \chi_{E_{j,\theta}}$

$$I_\infty v(u) = \int_X \chi_{E_{j,\theta}} v\,d\mu = \int_{E_{j,\theta}} v\,d\mu \geq \theta \mu(E_{j,\theta}) = \theta \|u\|_{L^1(\mu)}.$$

Mit $\theta \nearrow 1$ sehen wir $\|I_\infty v\| \geq 1 = \|v\|_{L^\infty(\mu)}$, also $\|I_\infty v\| = \|v\|_{L^\infty(\mu)}$. $\square$

Satz 6.2 (L^p-L^q-Dualität) *Sei μ ein äußeres Maß auf X und $1 \leq p < \infty$. Im Fall $p = 1$ sei zusätzlich μ σ-endlich. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Abbildung*

$$I_q : L^q(\mu) \to L^p(\mu)',\ I_q v(u) = \int_X uv\,d\mu,$$

surjektiv, also eine Isometrie.

Zu jedem $\phi \in L^p(\mu)'$ gibt es also genau ein $v \in L^q(\mu)$ mit

$$\phi(u) = \int_X uv\, d\mu \quad \text{für alle } u \in L^p(\mu).$$

Beweis: Wir nehmen zuerst $1 < p < \infty$ an. Sei $\phi \in L^p(\mu)'$ gegeben, ohne Einschränkung $\|\phi\| = \sup_{u \in S^p(\mu)} \phi(u) = 1$.

Schritt 1. *Ist $u_0 \in S^p(\mu)$ mit $\phi(u_0) = 1$, so gilt $I_q(T_p(u_0)) = \phi$, also ist $v_0 = T_p(u_0)$ Lösung des Darstellungsproblems.*

Wir berechnen die notwendige Bedingung im Maximum u_0. Für $u \in L^p(\mu)$ beliebig und $|t| \leq 1$ gilt nach Kettenregel

$$\partial_t |u + tu|^p = p\,\mathrm{sign}\,(u_0 + tu)|u_0 + tu|^{p-1} u, \qquad \text{also } \big|\partial_t |u_0 + tu|^p\big| \leq p(|u_0| + |u|)^p \in L^1(\mu).$$

Also ergibt sich durch Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{dt} \|u_0 + tu\|_{L^p(\mu)}|_{t=0} = \int_X \mathrm{sign}\,(u_0)|u_0|^{p-1} u\, d\mu = \int_X T_p(u_0) u = I(T_p(u_0))(u).$$

Aus der Maximaleigenschaft von u_0 folgt nun

$$0 = \frac{d}{dt} \phi\Big(\frac{u_0 + tu}{\|u_0 + tu\|_{L^p(\mu)}}\Big)|_{t=0} = \phi(u) - I(T_p(u_0))(u).$$

Damit ist Schritt 1 gezeigt.

Schritt 2. *Es gibt ein $u_0 \in S^p(\mu)$ mit $\phi(u_0) = 1$.*

Wir zeigen, dass jede Maximalfolge eine Cauchyfolge ist; daraus folgt, dass es genau eine Maximalstelle gibt. Wir verwenden dazu folgenden Begriff:

Definition 6.1 *Ein normierter Vektorraum heißt gleichmäßig konvex, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass folgende Implikation gilt:*

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 1,\ \Big\|\frac{u_1 + u_2}{2}\Big\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|u_1 - u_2\| < \varepsilon. \tag{6.28}$$

Wir zeigen unten, dass die L^p-Räume für $1 < p < \infty$ gleichmässig konvex sind, und wenden das hier an. Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie in Definition 6.1 gewählt. Für die Maximalfolge u_k gilt

$$\Big\|\frac{u_k + u_l}{2}\Big\|_{L^p(\mu)} \geq \phi\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big) = \frac{1}{2}\big(\phi(u_k) + \phi(u_l)\big) > 1 - \delta \quad \text{für } k, l \text{ hinreichend groß,}$$

und damit $\|u_k - u_l\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon$. Das zeigt Schritt 2, und damit den Satz für $p > 1$.

Schritt 3. *Für μ σ-endlich ist $I_\infty : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)'$ surjektiv.*

Sei $\phi \in L^1(\mu)'$. Für $E \subset X$ μ-messbar, $\mu(E) < \infty$ und $1 < p < \infty$ betrachte

$$\phi_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R},\ \phi_p(u) = \phi(\chi_E u).$$

Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt nach Hölder $\|\chi_E u\|_{L^1(\mu)} \leq \mu(E)^{1/q} \|u\|_{L^p(\mu)}$, also

$$\|\phi_p\| \leq \|\phi\| \, \mu(E)^{1/q}.$$

Wie bewiesen gibt es genau ein $v_p \in L^q(\mu)$ mit

$$I_q v_p(u) = \phi_p(u) = \phi(\chi_E u) \quad \text{für alle } u \in L^p(\mu).$$

Daraus folgt für alle $u \in L^p(\mu)$

$$I_q(\chi_{X \backslash E} v_p)(u) = I_q v_p(\chi_{X \backslash E} u) = \phi(\chi_E \chi_{X \backslash E} u) = 0.$$

Wegen I_q injektiv ist $v_p = 0$ μ-fast-überall auf $X \backslash E$. Sei nun $1 < p' < p$, also $q < q' < \infty$. Dann gilt $v_{p'} \in L^q(\mu)$ wegen $v_{p'} = 0$ auf $X \backslash E$ und $\mu(E) < \infty$. Wir berechnen für $u \in L^p(\mu)$, also $\chi_E u \in L^{p'}(\mu)$,

$$I_q v_{p'}(u) = \int_X \chi_E u v_{p'} \, d\mu = I_{q'} v_{p'}(\chi_E u) = \phi(\chi_E \chi_E u) = \phi(\chi_E u) = I_q v_p(u).$$

Aus I_q injektiv folgt $v_{p'} = v_p =: v$ fast überall, und nach Lemma 6.1

$$\|v\|_{L^{q'}(\mu)} = \|v_{p'}\|_{L^{q'}(\mu)} = \|\phi_{p'}\| \leq \|\phi\| \, \mu(E)^{\frac{1}{q'}} \to \|\phi\| \quad \text{mit } p' \searrow 1.$$

Dies zeigt $\|v\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\phi\|$. Setze nun für $u \in L^1(\mu)$ und $k \in \mathbb{N}$

$$u_k(x) = \begin{cases} k & \text{falls } u(x) \geq k, \\ -k & \text{falls } u(x) \leq -k, \\ u(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dannn ist $\chi_E u_k \in L^p(\mu)$ und und $\chi_E u_k \to \chi_E u$ in $L^1(\mu)$. Es folgt

$$\int_X uv \, d\mu = \int_X \chi_E uv \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X \chi_E u_k v \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \phi(\chi_E u_k) = \phi(\chi_E u).$$

Schließlich sei $X = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ mit μ-messbaren E_k, $\mu(E_k) < \infty$ und $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. Seien $v_k \in L^\infty(\mu)$ wie oben konstruiert, dann folgt für $u \in L^1(\mu)$ und $k < k'$

$$I_\infty(\chi_{E_k} v_{k'})(u) = \int_X \chi_{E_k} u v_{k'} \, d\mu = \phi(\chi_{E_{k'}} \chi_{E_k} u) = \phi(\chi_{E_k} u) = I_\infty v_k(u).$$

Wieder wegen Eindeutigkeit ist $v_{k'} = v_k$ auf E_k fast überall. Es gibt daher $v \in L^\infty(\mu)$ so dass $\chi_{E_k} v = v_k$ fast überall, genauer gilt $\|v\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\phi\|$. Dieses v hat die Darstellungseigenschaft, denn für alle $u \in L^1(\mu)$ folgt

$$I_\infty v(u) = \lim_{k \to \infty} I v(\chi_{E_k} u) = \lim_{k \to \infty} I_\infty v_k(\chi_{E_k} u) = \lim_{k \to \infty} \phi(\chi_{E_k} u) = \phi(u).$$

$\square$

Wir zeigen nun

Satz 6.3 *Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex.*

Beweis: Wir zeigen für alle $u, v \in L^p(\mu)$ folgende Ungleichungen, mit $\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\mu)}$ und einer Konstante $c = c(p) > 0$:

$$\text{(6.29)} \qquad \frac{1}{2}(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p) - \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p \geq c \begin{cases} \|u-v\|_p^p & \text{für } p \geq 2, \\ (\|u\|_p + \|v\|_p)^{p-2}\|u-v\|_p^2 & \text{für } 1 < p < 2. \end{cases}$$

Daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes. Der Beweis von (6.29) beruht auf der Konvexität der Funktion $f(u) = |u|^p$, genauer behaupten wir für $|u| + |v| > 0$ mit $c = c(p) > 0$

$$\text{(6.30)} \qquad \frac{1}{2}(|u|^p + |v|^p) - \Big|\frac{u+v}{2}\Big|^p \geq c \begin{cases} |u-v|^p & \text{für } p \geq 2, \\ (|u| + |v|)^{p-2}|u-v|^2 & \text{für } 1 < p < 2. \end{cases}$$

Im Fall $p \geq 2$ folgt (6.29) direkt aus (6.30), indem wir $u = u(x)$, $v = v(x)$ einsetzen und integrieren. Im Fall $1 < p < 2$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung, mit Exponenten $2/(2-p)$ bzw. $2/p$, und aus (6.30) mit $X^+ = \{x \in X : |u(x)| + |v(x)| > 0\}$

$$\begin{aligned} \|u-v\|_p^2 &= \Big(\int_{X^+} (|u| + |v|)^{\frac{p}{2}(2-p)} (|u| + |v|)^{\frac{p}{2}(p-2)} |u-v|^p \, d\mu\Big)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq \Big(\int_{X^+} (|u| + |v|)^p \, d\mu\Big)^{\frac{2-p}{p}} \Big(\int_{X^+} (|u| + |v|)^{p-2} |u-v|^2 \, d\mu\Big) \\ &\leq C(p) \Big(\|u\|_p + \|v\|_p\Big)^{2-p} \int_X \Big(\frac{1}{2}(|u|^p + |v|^p) - \Big|\frac{u+v}{2}\Big|^p\Big) \, d\mu. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Minkowski-Ungleichung in $L^p(\mu)$ und (6.30) benutzt. Insgesamt bleibt nun (6.30) zu zeigen. Durch Vertauschen von u, v und Skalierung können wir dazu annehmen, dass $u = 1$ und $v \in [-1, 1]$. Betrachte also die Funktionen

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \frac{1}{2}(1 + |v|^p) - \Big(\frac{1+v}{2}\Big)^p, \\ \tau(v) &= \begin{cases} (1-v)^p & \text{für } p \geq 2, \\ (1 + |v|)^{p-2}(1-v)^2 & \text{für } 1 < p < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir berechnen $\sigma'(v) = \frac{p}{2}\Big(\operatorname{sign}(v)|v|^{p-1} - \big(\frac{1+v}{2}\big)^{p-1}\Big) < 0$ für $v < 1$, also

$$\sigma(1) = \sigma'(1) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma''(1) = \frac{p(p-1)}{4} > 0.$$

Weiter ist $0 \leq \tau(v) \leq \max(2^p, 4)$ auf $[-1, 1]$, und

$$\tau(1) = \tau'(1) = 0, \quad \tau''(1) = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 2, \\ 2^{p-1} & \text{für } 1 < p \leq 2, \end{cases}.$$

Wähle $\alpha = \alpha(p) > 0$ mit $\sigma''(1) - \alpha\tau''(1) > 0$. Nach Taylor gibt es dann ein $\delta = \delta(p) > 0$ mit

$$\sigma(v) - \alpha\tau(v) \geq 0 \quad \text{für } v \in [1-\delta, 1].$$

Weiter folgt für alle $v \in [-1, 1-\delta]$

$$\sigma(v) \geq \sigma(1-\delta) \geq \frac{\sigma(1-\delta)}{\max(2^p, 4)}\tau(v).$$

Somit ist $\sigma(v) \geq c(p)\tau(v)$ auf ganz $[-1, 1]$, also gilt (6.30), womit der Satz bewiesen ist. □

Optimale Versionen der obigen Ungleichung sind von J.A. Clarkson bewiesen worden (1936), aber diese werden hier nicht gebraucht.

Beispiel 6.1 Sei $I = [0,1]$. Die Projektion auf die fast-überall Äquivalenzklasse

$$(C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)}) \to (L^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty(I)})$$

ist isometrisch und identifiziert $C^0(I)$ mit einem abgeschlossenen, echten Unterraum von $L^\infty(I)$. Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.1, gibt es ein $\phi \in L^\infty(I)'$ mit $\phi = 0$ auf $C^0(I)$, aber $\|\phi\| = 1$. Angenommen es gibt ein $f \in L^1([0,1])$ mit

$$\phi(g) = \int_I fg \, d\mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } g \in L^\infty(I),$$

also insbesondere

$$0 = \int_I fg \, d\mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } g \in C^0(I).$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung impliziert $f = 0$ fast überall auf I, also $\phi = 0$, ein Widerspruch. Somit ist die Abbildung $I_1 : L^1(I) \to L^\infty(I)'$ nicht surjektiv.

Ein Darstellungssatz für $L^\infty(\mu)'$ wird zum Beispiel im Buch von H.W. Alt diskutiert. Für die Anwendungen wichtiger ist jedoch der Raum $C^0(X)'$, wobei (X,d) ein kompakter metrischer Raum ist. Bisher war X ein beliebiger Maßraum, jetzt spielt also die Topologie bzw. Metrik eine Rolle; wir wollen das kurz skizzieren.

Sei μ ein Radonmaß auf dem kompakten metrischen Raum (X,d), das heißt

- alle Borelmengen sind μ-messbar,
- zu jedem $E \subset X$ gibt es $B \supset E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(E)$ (*Borelhülle*),
- $\mu(X) < \infty$.

Ist $\eta : X \to \mathbb{R}^k$ μ-messbar mit $|\eta(x)| = 1$ für μ-fast-alle $x \in X$, so haben wir die Linearform

(6.31) $$\phi : C^0(X, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R},\ \phi(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle \, d\mu.$$

ϕ ist stetig, genauer ergibt die Standardabschätzung des Integrals

(6.32) $$|\phi(f)| \leq C \, \|f\|_{C^0(X)} \text{ für alle } f \in C^0(X, \mathbb{R}^k) \text{ mit } C = \mu(X).$$

Der folgende Satz besagt, dass umgekehrt jedes stetige lineare Funktional ϕ auf $C^0(X, \mathbb{R}^k)$ eine Darstellung wie in (6.31) hat.

Satz 6.4 (Riesz-Radon) *Sei (X,d) kompakter metrischer Raum, und $\phi : C^0(X, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional.*

(1) *Auf X ist ein Radonmass μ, das Variationsmaß von ϕ, wie folgt definiert:*

   - $\mu(U) = \sup\{\phi(f) : |f| \leq 1, \operatorname{spt} f \subset U\}$ *für U offen,*
   - $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E,\ U \text{ offen}\}$ *für E beliebig.*

(2) *Es gibt $\eta : X \to \mathbb{R}^k$ μ-messbar mit $|\eta(x)| = 1$ für μ-fast-alle $x \in X$, so dass*

(6.33) $$\phi(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X, \mathbb{R}^k).$$

(3) *Das Maß μ und die Funktion η mit $|\eta| = 1$ sind durch (6.33) eindeutig bestimmt.*

Im Fall reellwertiger Funktionen ist $\eta : X \to \{\pm 1\}$, man spricht von einem signierten Radonmass. Der Beweis des Satzes erfordert einige Vorbereitungen aus der Maßtheorie und ist relativ lang, siehe mein FA-Skript aus dem Jahr 2014. Der Satz hat auch eine Verallgemeinerung auf metrische Räumen, deren Abstandskugeln kompakt sind; man muss dann mit Funktionen $f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$ arbeiten.

7 Schwache Konvergenz

Betrachte eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Folgenraum $\ell^p(\mathbb{R})$ mit $\|x_k\|_p \leq 1$ für alle k. Wie schon festgestellt, existiert im allgemeinen keine Teilfolge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ konvergiert. Das bekannte Beispiel ist die Koordinatenfolge $x^i_k = \delta_{ik}$, mit $\|x_k - x_l\|_p = 2^{1/p}$ für $k \neq l$. Andererseits ist jede Folge $(x^i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, genauer ist $|x^i_k| \leq \|x_k\|_p \leq 1$. Mit einem Diagonalverfahren finden wir dann eine Teilfolge, so dass nach Umnummerierung gilt: $x^i := \lim_{k\to\infty} x^i_k$ existiert für alle $i \in \mathbb{N}$. Es folgt dann

$$\Big(\sum_{i=1}^N |x^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^N |x^i_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_p.$$

Mit $x = (x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt also $\|x\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_p \leq 1$, insbesondere ist $x \in \ell^p(\mathbb{R})$. Obwohl die Folge in $\ell^p(\mathbb{R})$ im allgemeinen nicht konvergiert, erhalten wir einen geeigneten Grenzwert mittels koordinatenweise Konvergenz. Das Konzept des schwachen Grenzwerts verallgemeinert diese Situation.

Definition 7.1 (schwache Grenzwerte) *Sei X ein Banachraum.*

(1) *Die Folge $x_k \in X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$ ($x_k \rightharpoonup x$), falls :*

$$\phi(x_k) \to \phi(x) \text{ für alle } \phi \in X'.$$

(2) *Die Folge $\phi_k \in X'$ konvergiert schwach$*$ gegen $\phi \in X'$ ($\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$), falls gilt:*

$$\phi_k(x) \to \phi(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Schwach$*$ Konvergenz ist nichts anderes als punktweise Konvergenz der $\phi_k : X \to \mathbb{R}$.

Beispiel 7.1 In einem Hilbertraum X gilt nach Satz 5.1

$$x_k \to x \text{ schwach} \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_k, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ für alle } y \in Y.$$

Beispiel 7.2 Sei $1 \leq q < \infty$. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$(7.34) \qquad g_k \to g \text{ schwach in } L^q(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f g_k \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^p(\mu).$$

Dies folgt aus der L^p-L^q-Dualität, Satz 6.2, wobei μ σ-endlich im Fall $q = 1$.

Beispiel 7.3 Sei $1 < q \leq \infty$. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$(7.35) \qquad g_k \to g \text{ schwach}* \text{ in } L^p(\mu)' \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f g_k \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^p(\mu).$$

Dies folgt wieder aus der L^p-L^q-Dualität, wobei nun μ σ-endlich für $q = \infty$. Insbesondere stimmen schwache und schwach$*$-Konvergenz überein für $1 < q < \infty$.

Beispiel 7.4 Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Nach Definition ist

$$\phi_k \to \phi \text{ schwach}* \text{ in } C^0(X)' \quad \Leftrightarrow \quad \phi_k(f) \to \phi(f) \text{ für alle } f \in C^0(X).$$

Sind μ_k, μ Radonmaße auf X, so können sie als (nichtnegative) lineare Funktionale auf $C^0(X)$ aufgefasst werden. Damit ergibt sich folgender Konvergenzbegriff:

$$(7.36) \qquad \mu_k \to \mu \text{ schwach} \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f \, d\mu_k \to \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Eigentlich müsste es *schwach$*$* heißen; man spricht auch von Konvergenz im Sinne von Radonmaßen. Die folgende Charakterisierung ist jedenfalls nützlich.

Satz 7.1 (schwache Konvergenz von Radonmaßen) *Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Für Radonmaße μ_k, μ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\mu_k \to \mu$ schwach als Radonmaße*

(2) *$\mu(U) \leq \liminf_{k \to \infty} \mu_k(U)$ für alle $U \subset X$ offen,*
$\mu(K) \geq \limsup_{k \to \infty} \mu_k(K)$ für alle $K \subset X$ kompakt.

(3) *$\mu(B) = \lim_{k \to \infty} \mu_k(B)$ für jede Borelmenge B mit $\mu(\partial B) = 0$.*

Beweis: (1) $\Rightarrow$(2): Sei U offen. Für $K \subset U$ kompakt und $\chi \in C^0(X)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ auf K, spt $\chi \subset U$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu(K) &\leq \int_X \chi \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X \chi \, d\mu_k \leq \liminf_{k \to \infty} \mu_k(U), \\
\mu(U) &\geq \int_X \chi \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X \chi \, d\mu_k \geq \limsup_{k \to \infty} \mu_k(K).
\end{aligned}$$

Aus den Approximationseigenschaften von Radonmaßen folgt

$$\begin{aligned}
\mu(U) &= \sup\{\mu(K) : K \subset U, \, K \text{ kompakt}\} \leq \liminf_{k \to \infty} \mu_k(U), \\
\mu(K) &= \inf\{\mu(U) : U \supset K, \, U \text{ offen}\} \geq \limsup_{k \to \infty} \mu_k(K).
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$(3): Dies folgt direkt aus der Zeile

$$\mu(B) = \mu(\text{int } B) \leq \liminf_{k \to \infty} \mu_k(\text{int } B) \leq \limsup_{k \to \infty} \mu_k(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(B).$$

(3) $\Rightarrow$(1): Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $t_0 < t_1 < \ldots t_N$ mit $t_0 < \min f \leq \max f < t_N$ und $|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon$. Da μ Radonmaß, ist die Menge der $t \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{f = t\}) > 0$ abzählbar, also können wir

$\mu(\{f = t_i\}) = 0$ für $i = 1, \ldots, N$ annehmen. Setze $B_i = \{t_{i-1} < f \leq t_i\}$ für $i = 1, \ldots, N$, also $\mu(\partial B_i) = 0$ und $X = \bigcup_{i=1}^N B_i$ disjunkt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Big| \int_X f\, d\mu_k - \int_X f\, d\mu \Big| \quad & \leq \quad \Big| \int_X f\, d\mu_k - \sum_{i=1}^N t_{i-1} \mu_k(B_i) \Big| + \Big| \sum_{i=1}^N t_{i-1}(\mu_k(B_i) - \mu(B_i)) \Big| \\
& \quad + \Big| \sum_{i=1}^N t_{i-1} \mu(B_i) - \int_X f\, d\mu \Big| \\
& \leq \quad \sum_{i=1}^N t_{i-1} |\mu_k(B_i) - \mu(B_i)| + \varepsilon(\mu_k(X) + \mu(X)).
\end{aligned}$$

Jetz folgt (1) mit $k \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$. $\square$

Wir kommen nun zu allgemeinen Eigenschaften der schwachen Konvergenz; folgende Tatsache wird benötigt.

Lemma 7.1 *Sei X normierter Raum. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$J : X \to X'',\ Jx(\phi) = \phi(x) \quad \textit{für alle } \phi \in X',$$

eine isometrische Einbettung.

Beweis: Trivialerweise gilt

$$\|Jx\|_{X''} = \sup_{\|\phi\|_{X'} \leq 1} |Jx(\phi)| = \sup_{\|\phi\|_{X'} \leq 1} |\phi(x)| \leq \|x\|_X.$$

Andererseits gibt es zu $x \in X$, nach Folgerung 3.2(1), ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\|_{X'} = 1$ und $\phi(x) = \|x\|$. Das bedeutet

$$\|Jx\|_{X''} \geq |Jx(\phi)| = |\phi(x)| = \|x\|_X.$$

$\square$

Satz 7.2 (Grundtatsachen zur schwachen Konvergenz) *Es gilt:*

(1) *Schwache bzw. schwach$*$ Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.*

(2) *Schwache bzw. schwach$*$-konvergente Folgen sind beschränkt.*

(3) *Unterhalbstetigkeit der Normen:*

$$\begin{aligned}
x_k \to x \textit{ schwach} \quad & \Rightarrow \quad \|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|. \\
\phi_k \to \phi \textit{ schwach}* \quad & \Rightarrow \quad \|\phi\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|.
\end{aligned}$$

Beweis: Angenommen $x_k \to x$ sowie $x_k \to y$ schwach in X. Dann gilt für jedes $\phi \in X'$

$$\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) - \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = 0.$$

Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.2(2), folgt $x = y$. Für schwach$*$ Grenzwerte ist die Eindeutigkeit trivial.

Die Beschränktheit von schwach$*$ konvergenten Folgen in X' wurde schon in Folgerung 4.1 mit Banach-Steinhaus gezeigt. Sei nun $x_k \to x$ schwach in X, und $J : X \to X''$ die kanonische isometrische Einbettung. Dann gilt für alle $\phi \in X'$

$$Jx(\phi) = \phi(x) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} Jx_k(\phi),$$

also $Jx_k \to Jx$ schwach$*$ in $X'' = (X')'$. Also ist Jx_k beschränkt in X''. Da $J : X \to X''$ isometrisch nach Lemma 7.1, ist die Folge x_k in X beschränkt.

In (3) betrachten wir wieder erst die schwach$*$ Konvergenz $\phi_k \to \phi$ in $X = Y'$. Ist $y \in Y$ mit $\|y\| \leq 1$, so gilt

$$|\phi(y)| = \lim_{k\to\infty} |\phi_k(y)| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|.$$

Mit Supremum über y folgt $\|\phi\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|$. Sei nun $x_k \to x$ schwach in X. Wie oben gezeigt, gilt dann $Jx_k \to Jx$ schwach$*$ in X'', und mit Lemma 7.1 folgt

$$\|x\| = \|Jx\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|Jx_k\| = \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|.$$

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. $\square$

Um die Konvergenz bezüglich der Norm abzugrenzen, wird sie auch als starke Konvergenz bezeichnet. Es gelten folgende weitere Aussagen zur schwachen Konvergenz, die als Übungsaufgabe behandelt werden sollen:

(4) Aus starker Konvergenz folgt schwache beziehungsweise schwach$*$ Konvergenz.

(5) Ist $x_k \to x$ schwach in X und $\phi_k \to \phi$ stark in X', so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.
Ist $\phi_k \to \phi$ schwach$*$ in X' und $x_k \to x$ stark in X, so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(6) Ist $x_k \to x$ schwach in X und $T \in L(X,Y)$, so folgt $Tx_k \to Tx$ schwach in Y.

Ein zentraler Punkt bei der schwachen Konvergenz ist folgende Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Satz 7.3 (schwach$*$ Folgenkompaktheit) *Sei X separabler Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge ϕ_k in X' eine Teilfolge, die schwach$*$ gegen ein $\phi \in X'$ konvergiert.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $C := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty$, und es gibt eine dichte Teilmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Es gilt also

$$|\phi_k(x_n)| \leq C\|x_n\| \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}.$$

Durch sukzessive Wahl von Teilfolgen und Übergang zur Diagonalfolge folgt

$$\exists \lim_{k\to\infty} \phi_k(x_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $X_0 = \operatorname{Span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, das heißt jedes $x \in X_0$ hat eine Darstellung $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, mit $\alpha_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\phi : Y_0 \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(x).$$

Dann ist ϕ wohldefiniert und linear, und es folgt

$$|\phi(x)| = \lim_{k\to\infty} |\phi_k(x)| \leq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in X_0.$$

Damit ist ϕ Lipschitzstetig auf der dichten Teilmenge X_0, also fortsetzbar zu einem linearen Funktional $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| \leq C$. Für $x \in X$ und $x_0 \in X_0$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\|\phi(x) - \phi_k(x)\| \leq \|\phi(x) - \phi(x_0)\| + \|\phi(x_0) - \phi_k(x_0)\| + \|\phi_k(x_0) - \phi_k(x)\|,$$

und hieraus mit $k \to \infty$

$$\limsup_{k\to\infty} \|\phi(x) - \phi_k(x)\| \leq 2C\|x - x_0\|.$$

Da X_0 dicht in X, folgt $\phi_k(x) \to \phi(x)$ für alle $x \in X$, das heißt $\phi_k \to \phi$ schwach$*$ in X'. □

Wir wollen einen entsprechenden Satz für die schwache Konvergenz folgern. Dazu folgende

Definition 7.2 *Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung*

$$J : X \to X'',\ Jx(\phi) = \phi(x),$$

surjektiv ist.

Lemma 7.2 *Ist X reflexiver Banachraum, so ist jeder abgeschlossene Unterraum $X_0 \subset X$ ebenfalls reflexiv.*

Beweis: Sei $\lambda \in X_0''$ gegeben. Definiere die Fortsetzung

$$\Lambda : X' \to \mathbb{R},\ \Lambda(\phi) = \lambda(\phi|_{X_0}).$$

Es folgt

$$|\Lambda(\phi)| \leq \|\lambda\|\|\phi|_{X_0}\| \leq \|\lambda\|\|\phi\|,$$

also gilt $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$ und insbesondere $\Lambda \in X''$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in X$ mit $\Lambda = J_X x$. Angenommen es ist $x \notin X_0$, also nach Voraussetzng $\operatorname{dist}(x, X_0) > 0$. Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.1, gibt es dann ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{X_0} = 0$ und $\phi(x) \neq 0$. Dann ist

$$0 = \lambda(\phi|_{X_0}) = \Lambda(\phi) = (J_X x)(\phi) = \phi(x) \neq 0,$$

ein Widerspruch. Somit gilt $x \in X_0$. Zu $\varphi \in X_0'$ existiert, wieder nach Hahn-Banach Satz 3.1, ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{X_0} = \varphi$. Es folgt dann

$$(J_{X_0} x)(\varphi) = \varphi(x) = \phi(x) = (J_X x)(\phi) = \Lambda(\phi) = \lambda(\varphi),$$

das heißt $\lambda = J_{X_0} x$ wie verlangt. □

Satz 7.4 (schwache Folgenkompaktheit) *Sei X reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.*

BEWEIS: Sei $\|x_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$X_0 = \overline{\operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Dann ist X_0 separabel sowie nach Lemma 7.2 reflexiv, also $J_{X_0} : X_0 \to X_0''$ surjektive Isometrie. Somit ist auch X_0'' separabel, und dann nach Folgerung 3.5 auch X_0' separabel. Damit ist Satz 7.3 auf die Folge $J_{X_0} x_k \in X_0''$ anwendbar: da J_{X_0} surjektiv, gibt es ein $x \in X_0$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:

$$\varphi(x_k) = (J_{X_0} x_k)(\varphi) \to (J_{X_0} x)(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{für alle } \varphi \in X_0'.$$

Sei nun $\phi \in X'$. Dann folgt

$$\phi(x_k) = \phi|_{X_0}(x_k) \to \phi|_{X_0}(x) = \phi(x).$$

Also gilt $x_k \to x$ schwach in X. □

Wir wollen die abstrakten Kompaktheitssätze nun konkretisieren.

Satz 7.5 (schwache Folgenkompaktheit in Hilberträumen) *In einem Hilbertraum X hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

BEWEIS: Nach Folgerung 5.1 ist X reflexiv, die Aussage folgt also direkt aus Satz 7.4. □

Satz 7.6 (schwache Folgenkompaktheit in $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$) *Sei μ ein Maß auf X und $1 < p < \infty$. Dann besitzt jede beschränkte Folge $f_k \in L^p(\mu)$ eine schwach konvergente Teilfolge, das heißt nach Übergang zur Teilfolge gilt*

$$\int_X f_k g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \textit{für alle } g \in L^q(\mu).$$

BEWEIS: Wir zeigen dass $L^p(\mu)$ reflexiv ist, die Behauptung folgt dann mit Satz 7.4. Sei $\phi \in L^p(\mu)''$, das heißt $\phi : L^p(\mu)' \to \mathbb{R}$ ist lineares Funktional. Die Abbildung $I_q : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ ist stetig, sogar isometrisch, also gilt $\phi \circ I_q \in L^q(\mu)'$. Nach Satz 6.2 gibt es ein $f \in L^p(\mu)$ mit

$$(\phi \circ I_q)(g) = \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Sei nun $J_p : L^p(\mu) \to L^p(\mu)''$ die kanonische Einbettung. Dann folgt

$$(J_p f)(I_q g) = (I_q g)(f) = \int_X f g \, d\mu = (\phi \circ I_q)(g) = \phi(I_q g).$$

Nach Satz 6.2 ist $I_q : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ surjektiv, also folgt $J_p f = \phi$ wie behauptet. □

Lemma 7.3 (zur Separabilität) *In einem kompakten, metrischen Raum (X, d) gilt:*

(1) *$C^0(X)$ ist separabel.*

(2) *$L^p(\mu)$ ist separabel, falls μ Radonmaß auf X und $1 \leq p < \infty$.*

BEWEIS: Zu $\delta > 0$ gibt es eine Teilung der Eins $\chi_i \in C^0(X)$, $1 \leq i \leq N$:

- spt $\chi_i \subset B_\delta(x_i)$ für ein $x_i \in X$,
- $0 \leq \chi_i \leq 1$
- $\sum_{i=1}^N \chi_i = 1$ auf X.

Wähle dazu eine Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^N B_{\delta/2}(x_i)$ und $\tilde{\chi}_i \in C^0(X)$ mit spt $\tilde{\chi}_i \subset B_\delta(x_i)$, $0 \leq \tilde{\chi}_i \leq 1$ und $\tilde{\chi}_i = 1$ auf $B_{\delta/2}(x_i)$. Dann ist $\sum_{j=1}^N \tilde{\chi}_j \geq 1$ auf X, und wir können $\chi_i = \tilde{\chi}_i / \sum_{j=1}^N \tilde{\chi}_j$ setzen. Für $f \in C^0(X)$ schätzen wir nun ab

$$\Big| f(x) - \sum_{i=1}^N f(x_i)\chi_i(x) \Big| = \Big| \sum_{i=1}^N (f(x) - f(x_i))\chi_i(x) \Big| \leq \operatorname{osc}(f, \delta) \to 0 \quad \text{mit } \delta \searrow 0.$$

Mit $\delta_k = \frac{1}{k}$ können wir alle $f \in C^0(X)$ gleichmäßig durch Linearkombinationen solcher $\chi_{i,k}$ approximieren. Das liefert eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn wir nur Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ nehmen.

Sei nun μ ein Radonmaß und $1 \leq p < \infty$. Wir zeigen, dass jede Funktion χ_E, $E \subset X$ μ-messbar, durch $C^0(X)$ approximiert wird. Daraus folgt die Behauptung, denn Stufenfunktionen sind dicht in $L^p(\mu)$. Wähle $K \subset E$ kompakt mit $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$, und setze

$$\varphi_\delta \in C^0(X),\ \varphi_\delta(x) = \Big(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, K)}{\delta}\Big)^+.$$

Es folgt mit $K_\delta = \{x \in K : \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}$ für $\delta > 0$ hinreichend klein

$$\int_X |\varphi_\delta - \chi_E|^p \, d\mu \leq \mu(E \backslash K) + \mu(K_\delta \backslash K) < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 7.1 Sei (X, d) metrischer Raum und μ Radonmasß auf X. Für die Separabilität von $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, reicht folgende Bedingung:

(7.37) Für alle $x_0 \in X$, $r > 0$, ist $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ kompakt.

Denn $f \in L^p(\mu)$ wird durch $f\chi_{\overline{B_k(x_0)}}$ approximiert, und $L^p(\overline{B_k(x_0)}, \mu)$ ist separabel.

Satz 7.7 (schwach∗-Folgenkompaktheit in $L^\infty(\mu)$) *Sei (X, d) metrischer Raum mit (7.37), und μ sei Radonmaß auf X. Dann besitzt jede beschränkte Folge $f_k \in L^\infty(\mu)$ eine schwach∗-konvergente Teilfolge, das heißt nach Übergang zur Teilfolge gilt*

$$\int_X f_k g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{\textit{für alle} } g \in L^1(\mu).$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist μ σ-endlich, also $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)'$ nach Satz 6.2. Weiter ist $L^1(\mu)$ separabel nach Bemerkung 7.1. Die Behauptung folgt also aus Satz 7.3. □

Für $L^1(\mu)$ haben wir leider keinen Kompaktheitssatz. Zum einen haben wir $L^1(\mu)$ nicht als Dualraum charakterisiert, die Einbettung nach $L^\infty(\mu)'$ ist im allgemeinen nicht surjektiv, siehe 6.1. Deshalb ist $L^1(\mu)$ auch nicht reflexiv.

Satz 7.8 (Kompaktheitssatz für Radonmaße) *Sei (X,d) metrischer Raum mit (7.37), und μ_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Radonmaßen auf X mit*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(K) < \infty \quad \text{für alle } K \subset X \text{ kompakt.}$$

Dann gibt es ein Radonmaß μ auf X, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:

$$\mu_k \to \mu \text{ schwach (im Sinne von Radonmaßen).}$$

Beweis: Wir nehmen an, dass X kompakt ist, andernfalls betrachte Ausschöpfung durch relativ kompakte Kugeln. Der Raum $C^0(X)$ ist separabel. Nun gilt

$$\sup \Big\{ \int_X f \, d\mu_k : f \in C^0(X),\, |f| \leq 1 \Big\} = \mu_k(X) \leq C,$$

das heißt die Folge μ_k ist in $C^0(X)'$ beschränkt. Nach Satz 7.3 gibt es ein $\phi \in C^0(X)'$ mit

$$\phi(f) = \lim_{k \to \infty} \int_X f \, d\mu_k \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Insbesondere ist $|\phi(f)| \leq C\|f\|_{C^0(X)}$ und $\phi(f) \geq 0$ für $f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^+_0)$. Es gibt dann ein Radonmaß μ auf X mit

$$\phi(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Dies folgt aus dem Satz von Riesz-Radon, Satz 6.4. Man erhält eine Darstellung mit einer Vorzeichenfunktion $\eta : X \to \{\pm 1\}$; da das Funktional aber nichtnegativ ist, gilt $\eta = 1$ μ-fast-überall (Übungsaufgabe). $\square$

Puristen können kritisieren, dass wir die schwache Konvergenz definiert haben, ohne die zugehörige Topologie zu betrachten. Wir holen das kurz nach, hier für die schwach$*$ Topologie. Für $\phi \in X'$, $A \subset X$ endlich und $\varepsilon > 0$ definieren wir die Basismengen

$$U_{A,\varepsilon}(\phi) = \{\psi \in X' : \max_{x \in A} |\phi(x) - \psi(x)| < \varepsilon\}.$$

Sei $\phi \in U_{A_i,\varepsilon_i}(\phi_i)$ für $i = 1,2$. Dann gilt für $\psi \in U_{A_1 \cup A_2,\delta}(\phi)$ und $x_i \in A_i$ beliebig

$$|\phi_i(x_i) - \psi(x_i)| \leq |\phi_i(x_i) - \phi(x_i)| + |\phi(x_i) - \psi(x_i)| < \max_{x \in A_i} |\phi_i(x) - \phi(x)| + \delta.$$

Für $\delta > 0$ hinreichend klein folgt

$$U_{A_1 \cup A_1,\delta}(\phi) \subset U_{A_1,\varepsilon_1}(\phi_1) \cap U_{A_2,\varepsilon_2}(\phi_2).$$

Vereinigungen dieser Basismengen liefern also eine Topologie auf X'. Diese ist Hausdorffsch, denn zu $\phi_1 \neq \phi_2$ gibt es ein $x \in X$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}|\phi_1(x) - \phi_2(x)| > 0$, also

$$U_{\{x\},\varepsilon}(\phi_1) \cap U_{\{x\},\varepsilon}(\phi_2) = \emptyset.$$

Es gilt $\phi_k \to \phi$ bezüglich dieser Topologie, genau wenn für alle $A \subset X$ endlich und $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\max_{x \in A} |\phi_k(x) - \phi(x)| < \varepsilon \quad \text{für } k \text{ hinreichend groß.}$$

Das ist offensichtlich gleichbedeutend mit unserer Definition der schwach$*$ Konvergenz. Für die schwach$*$ Topologie gilt nun der folgende Satz.

Satz 7.9 (Banach-Alaoglu) *Sei X Banachraum. Dann sind abgeschlossene und beschränkte Mengen in X' kompakt bezüglich der schwach$*$ Topologie.*

In unserm Satz 7.3 ist zusätzlich vorausgesetzt, dass X separabel ist, insofern ist jener Satz schwächer. Allerdings wird das dadurch relativiert, dass Kompaktheit bezüglich der schwach$*$ Topologie im allgemeinen nicht Folgenkompaktheit impliziert. Ein Beispiel wird in einer Übungsaufgabe behandelt. Im Fall X separabel ist die Implikation aber doch richtig, so dass Satz 7.3 tatsächlich aus Satz 7.9 folgt. Der Beweis von Satz 7.9 ist allerdings nichtkonstruktiv, er verwendet den Satz von Tychonoff und damit das Lemma von Zorn. Dagegen erfordert unser Beweis von Satz 7.3 nur ein harmloses Diagonalfolgenargument.

8 Kompakte und Fredholm-Operatoren

Definition 8.1 *Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt kompakt, wenn gilt: für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat die Folge $(Kx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.*

Lemma 8.1 *Äquivalente Bedingungen für die Kompaktheit von $K \in L(X,Y)$ sind:*

(1) *Für jedes $B \subset X$ beschränkt ist $\overline{K(B)} \subset Y$ kompakt.*

(2) falls X reflexiv: *Für jede Folge $x_k \to x$ schwach in X folgt $Kx_k \to Kx$ stark in Y.*

Beweis: Sei K kompakt. Ist B beschränkt und y_k Folge in $\overline{K(B)}$, so gibt es $x_k \in B$ mit $\|y_k - Kx_k\| < \frac{1}{k}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt dann $Kx_k \to y$. Es folgt $y \in \overline{K(B)}$ und $y_k \to y$, also ist (1) bewiesen. Sei umgekehrt (1) erfüllt und x_k eine beschränkte Folge in X, also $\|x_k\| \leq R$ für alle K. Da $\overline{K(B_R(0)}$ kompakt, gilt für eine Teilfolge $Kx_k \to y$. Somit ist K kompakter Operator.

Wir zeigen jetzt: aus K kompakt folgt (2). Sei dazu $x_k \to x$ schwach in X. Dann ist die Folge x_k beschränkt und es gilt $Kx_k \to Kx$ schwach in Y (siehe Satz 7.2(2) sowie Aussage (6) nach diesem Satz). Angenommen Kx_k konvergiert nicht stark gegen Kx. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt

$$\|Kx_k - Kx\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da K kompakt, gilt aber für eine weitere Teilfolge $Kx_{k_j} \to y$ stark in Y. Da starke Konvergenz schwache Konvergenz impliziert, und der schwache Grenzwert eindeutig ist (Satz 7.2(1)), muss $y = Kx$ sein, ein Widerspruch. Sei schließlich nun (2) erfüllt, und x_k beschränkte Folge in X. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $x_k \to x$ schwach in X; hier brauchen wir die Voraussetzung X reflexiv. Aus (2) folgt dann $Kx_k \to Kx$ stark in Y, also ist K kompakt. $\square$

Beispiel 8.1 Jeder Operator $K \in L(X,Y)$ mit endlichdimensionalem Bild ist kompakt.

Beispiel 8.2 Sei X kompakter metrischer Raum und $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. In Satz 2.6 haben wir gezeigt, dass dann die Einbettung $C^{0,\alpha}(X) \subset C^{0,\beta}(X)$ kompakt ist. Sind $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $l + \beta < k + \alpha$, so ist die Einbettung $C^{k,\alpha}(\Omega) \subset C^{l,\beta}(\Omega)$ kompakt, falls Ω offen und beschränkt ist und eine Sehnenbogenbedingung erfüllt. Dies wird in Satz 2.8 bewiesen (*in der Vorlesung ausgelassen*).

Für die Sobolevräume gibt es einen analogen und wichtigen Kompaktheitssatz. Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma. Dabei ist im folgenden $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$ ein Glättungskern mit $\int_{R^n} \eta(x)\,dx = 1$.

Lemma 8.2 *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned}
&(8.38) \qquad \|u \circ \tau_h - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq& \; |h|\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{für } \tau_h(x) = x + h \textit{ mit } h \in \mathbb{R}^n,\\
&(8.39) \qquad \|\eta_\varrho * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq& \; \varrho\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Beweis: Durch Approximation können wir $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}^n |u(x+h) - u(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}}^n \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+th)\,dt\Big|^p\,dx\\
&= |h|^p \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |Du(x+th)|^p\,dt\,dx\\
&= |h|^p \|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - (\eta_\varrho * u)(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varrho(x-y)(u(x) - u(y))\,dy\Big|^p\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)(u(x) - u(x-\varrho z))\,dz\Big|^p\,dx\\
&\leq \int_{B_1(0)} \eta(z) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(x-\varrho z)|^p\,dxdz\\
&\leq \varrho^p\,\|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

□

Satz 8.1 (von Rellich) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $1 \leq p < \infty$ ist dann die Einbettung*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

ein kompakter linearer Operator.

Beweis: Sei $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gegeben mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq M$ für alle k. Wir müssen eine Teilfolge finden, die in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Die Idee ist, dass Glättungen $\eta_\varrho * u_k$ für $\varrho > 0$ fest beliebig gut gleichmäßig abgeschätzt sind, und daher nach Arzelà-Ascoli konvergente Teilfolgen haben. Dabei ist der L^p-Abstand von $\eta_\varrho * u_k$ zu u_k klein nach Lemma 8.2. Indem wir durch Null fortsetzen, ist $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit spt $u_k \subset \overline{\Omega}$. Wir betrachten

$$u_k^\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\; u_k^\varrho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varrho(x-y)u_k(y)\,dy \qquad \text{wobei } \eta_\varrho(x) = \varrho^{-n}\eta\Big(\frac{x}{\varrho}\Big).$$

Es gilt spt $u_k^\varrho \subset \overline{\Omega_\varrho}$ mit $\Omega_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}\,(x,\Omega) < \varrho\}$. Weiter gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig

$$D^\alpha u_k^\varrho(x) = \varrho^{-n-|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \eta(x-y)u_k(y)\,dy.$$

Wir schätzen mit Hölder ab, wobei $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ nach Voraussetzung,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u_k^\varrho(x)| &\leq \varrho^{-n-|\alpha|}\, \|D^\alpha \eta\|_{C^0} \int_{B_\varrho(x)} |u_k(y)|\, dy \\
&\leq C(\alpha,\eta)\, \varrho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|} \|u_k\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C(\alpha,\eta)\, M \varrho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Für $\varrho > 0$ fest gibt es also nach Arzelà-Ascoli eine Teilfolge, so dass $u_{k_j}^\varrho \to u^\varrho$ in $C^1(\mathbb{R}^n)$. Wähle nun eine Folge $\varrho_i \searrow 0$, und dazu sukzessive konvergente Teilfolgen. Nach Übergang zur Diagonalfolge gilt

$$u_k^\varrho \to u^\varrho \quad \text{in } C^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{für jedes } \varrho = \varrho_1, \varrho_2, \ldots,$$

und wir haben

$$\|u^\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du^\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \Big(\|u_k^\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du_k^\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big) \leq M.$$

Hier wurde die L^p-Abschätzung der Glättung benutzt, siehe Analysis 3, Satz 11.2, sowie die Vertauschbarkeit von Ableitung und Glättung, siehe Lemma 5.1. Mit Lemma 8.2 folgt nun

$$\begin{aligned}
\|u^{\varrho_i} - u^{\varrho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{k\to\infty} \|u_k^{\varrho_i} - u_k^{\varrho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \Big(\|u_k^{\varrho_i} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u_k^{\varrho_j} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big) \\
&\leq (\varrho_i + \varrho_j) \lim_{k\to\infty} \|Du_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq (\varrho_i + \varrho_j) M \to 0 \quad \text{mit } i,j \to \infty.
\end{aligned}$$

Mit Fischer-Riesz folgt $u^{\varrho_i} \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit spt $u \subset \overline{\Omega}$. Schließlich folgt

$$\|u - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{\|u - u^{\varrho_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\leq \varrho_i M} + \underbrace{\|u^{\varrho_i} - u_k^{\varrho_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\to 0 \text{ as } k\to\infty} + \underbrace{\|u_k^{\varrho_i} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\leq \varrho_i M}.$$

Es folgt $u_k \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, indem wir erst $k \to \infty$ und dann $i,j \to \infty$ gehen lassen. □

Lemma 8.3 *Es gilt*

(1) *Die Verkettungen* stetig $\circ$ kompakt *sowie* kompakt $\circ$ stetig *sind wieder kompakt.*

(2) *Ist $K : X \to Y$ kompakt, so auch $K' : Y' \to X'$.*

(3) *Die kompakten Operatoren bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.*

Beweis: (1) ist trivial und (3) ist eine Übungsaufgabe. Für (2) seien $\psi_k \in Y'$ mit $\|\psi_k\| \leq \Lambda < \infty$. Nach Lemma 8.1(1) ist $M = \overline{K(B_1(0))}$ kompakt in Y. Nun ist $\psi_k|_M$ gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig Lipschitz. Nach Arzela-Ascoli, Satz 2.4, ist $\psi_k|_M$ eine Cauchyfolge in $C^0(M)$, nach Übergang zu einer Teilfolge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\psi_k - \psi_l\|_{C^0(M)} < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l > K,$$

insbesondere wegen $K(B_1(0)) \subset M$

$$\|\psi_k \circ K - \psi_l \circ K\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\psi_k(Kx) - \psi_l(Kx)| < \varepsilon \qquad \text{für } k, l > K.$$

Also ist $K'\psi_k = \psi_k \circ K$ eine Cauchyfolge in X', und konvergiert in X'. $\square$

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Operatoren, und zwar den Fredholmoperatoren. Diese sind mit den kompakten Operatoren verbunden durch den Satz von Riesz-Schauder. Vorab eine allgemeine Tatsache.

Satz 8.2 (kanonischer Isomorphismus) *Für $L \in L(X,Y)$ ist die kanonische Abbildung*

$$F : \ker L' \to (Y/\overline{\mathrm{Bild}\, L})',\ (F\psi)([y]) = \psi(y), \tag{8.40}$$

eine Isometrie, insbesondere surjektiv.

Beweis: Für $\phi \in \ker L'$ gilt $\phi(Lx) = L'\phi(x) = 0$ für alle $x \in X$. Da ϕ stetig, folgt $\phi = 0$ auf $\overline{\mathrm{Bild}\, L}$, und $F\phi : Y/\overline{\mathrm{Bild}\, L} \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert. Nun gilt für alle $z \in \overline{\mathrm{Bild}\, L}$

$$F\phi([y]) = \phi(y) = \phi(y+z) \le \|\phi\|\,\|y+z\|.$$

Durch Bildung des Infimums über z folgt $\|F\phi\| \le \|\phi\|$ und $F\phi \in (Y/\overline{\mathrm{Bild}\, L})'$. Betrachte nun

$$G : (Y/\overline{\mathrm{Bild}\, L})' \to Y',\ G\psi(y) = \psi([y]).$$

Es gilt $|G\psi(y)| \le \|\psi\|\,\|\,[y]\,\| \le \|\psi\|\,\|y\|$, also $\|G\psi\| \le \|\psi\|$, insbesondere $G\psi \in Y'$. Außerdem bildet G nach $\ker L'$ ab, denn

$$L'(G\psi)(x) = (G\psi)(Lx) = \psi([Lx]) = 0.$$

Es ist offensichtlich, dass F, G zueinander invers sind. Somit sind F, G Isometrien. $\square$

Der Vollständigkeit halber geben wir einen zweiten kanonischen Isomorphismus an, der aber im Folgenden nicht benötigt wird.

Satz 8.3 *Hat $L \in L(X,Y)$ abgeschlossenes Bild, so ist auch* $\mathrm{Bild}\, L'$ *abgeschlossen und die kanonische Abbildung*

$$F : X'/\mathrm{Bild}\, L' \to (\ker L)',\ F([\phi])(x) = \phi(x).$$

ist eine (surjektive) Isometrie.

Beweis: F ist wohldefiniert wegen $L'\psi(x) = \psi(Lx) = 0$ für $\psi \in Y'$, $x \in \ker L$. Weiter gilt

$$|F[\phi](x)| = |(\phi + L'\psi)(x)| \le \|\phi + L'\psi\|\,\|x\|.$$

Durch Bildung des Infimums folgt $\|F[\phi]\| \le \|\,[\phi]\,\|$. Wir zeigen nun

$$\phi \in X' \text{ mit } \phi|_{\ker L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \in \mathrm{Bild}\, L'. \tag{8.41}$$

Für das gesuchte $\psi \in Y'$ muss offenbar $\psi(Lx) = \phi(x)$ gelten, und dadurch ist ψ auf $\mathrm{Bild}\, L$ auch wohldefiniert. Für die Stetigkeit von ψ schätzen wir für $x_0 \in \ker L$ beliebig ab:

$$|\psi(Lx)| = |\psi(L(x+x_0))| = |\phi(x+x_0)| \le \|\phi\|\,\|x+x_0\|,$$

also $|\psi(Lx)| \leq \| [x] \|$ nach Bildung des Infimums über x_0. Aber nun ist

$$\overline{L} : X/\ker L \to \operatorname{Bild} L,\ \overline{L}[x] = Lx,$$

bijektiv und stetig, also gilt $\| [x] \| \leq C\|Lx\|$ nach dem Satz von der beschränkten Inversen, Satz 4.4 (hier ist Bild L abgeschlossen wesentlich). Insgesamt ist $\psi \in (\operatorname{Bild} L)'$ und kann zu $\psi \in Y'$ fortgesetzt werden nach Hahn-Banach, Satz 3.1.

Jetzt definieren wir die Umkehrabbildung: setze $\varphi \in (\ker L)'$ nach Hahn-Banach mit gleicher Norm zu $\phi \in X'$ fort, dann ist $G\varphi = [\phi]$. Nach (8.41) ist das wohldefiniert, und

$$\|G\varphi\| = \|[\phi]\| \leq \|\phi\| = \|\varphi\|.$$

F, G sind zueinander invers. Ferner ist Bild $L' = \{\phi \in X' : \phi|_{\ker L} = 0\}$ abgeschlossen. □

Definition 8.2 *$L \in L(X,Y)$ heißt Fredholmoperator, falls* $\ker L$ *und* $\operatorname{coker} L = Y/\operatorname{Bild} L$ *endlichdimensional sind. Der Fredholmindex von L ist dann definiert als*

$$\operatorname{ind} L = \dim \ker L - \dim \operatorname{coker} L \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 8.4 *Das Bild eines Fredholmoperators $L : X \to Y$ ist stets abgeschlossen.*

Beweis: Sei dazu L injektiv, sonst gehe über zu $X/\ker L$. Wähle ein (algebraisches) Komplement Y_0 von Bild L. Dann ist $X \times Y_0$ ein Banachraum mit der Produktnorm, da Y_0 endlichdimensional ist. Die Abbildung $\tilde{L} : X \times Y_0 \to Y$, $\tilde{L}(x,y) = Lx + y$, ist bijektiv und stetig. Nach Satz 4.4 ist auch $\tilde{L}^{-1}$ stetig, und damit Bild $L = (\tilde{L}^{-1})^{-1}(X \times \{0\})$ abgeschlossen. □

Die beiden Zahlen in der Definition haben folgende Interpretation:

$$\begin{aligned} \dim \ker L \quad &= \quad \text{Anzahl der linear unabhängigen Lösungen} \\ &\quad\;\; \text{der homogenen Gleichung } Lx = 0. \\[2ex] \dim \operatorname{coker} L \quad &= \quad \text{Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen,} \\ &\quad\;\; \text{damit die inhomogene Gleichung } Lx = y \text{ lösbar ist.} \end{aligned}$$

Ein invertierbarer Operator ist Fredholm mit Index Null. Auf dem Folgenraum $\ell^2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots) \quad &\mapsto \quad (x_2, x_3, \ldots) \quad \text{hat Index } 1, \\ (x_1, x_2, \ldots) \quad &\mapsto \quad (0, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{hat Index } -1. \end{aligned}$$

Satz 8.4 (Riesz-Schauder) *Seien X, Y Banachräume. Die Abbildung $L_0 \in L(X,Y)$ habe eine beschränkte Inverse und $K \in L(X,Y)$ sei kompakt. Dann ist $L = L_0 + K$ Fredholmoperator vom Index Null. Insbesondere gilt*

$$L \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ injektiv}.$$

Bemerkung. Die letzte Aussage wird oft so formuliert: entweder die homogene Gleichung $Lx = 0$ hat eine nichttriviale Lösung, oder die inhomogene Gleichung $Lx = y$ ist für alle rechten Seiten y eindeutig lösbar (*Fredholmsche Alternative*).

Beweis: Wir können $X = Y$ und $L = \mathrm{Id} + K$ annehmen, andernfalls betrachte $L_0^{-1}L$. Wir zeigen den Satz in fünf Schritten.

Schritt 1 $\ker L$ und $\ker L'$ sind endlichdimensional
Sei $x_k \in \ker L$ mit $\|x_k\| \leq 1$. Dann gilt $x_k = -Kx_k$, also konvergiert x_k gegen ein $x \in \ker L$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Nach Satz 2.2 ist $\ker L$ endlichdimensional. Weiter gilt $L' = (\mathrm{Id} + K)' = \mathrm{Id} + K'$. Da K' kompakt ist nach Lemma 8.3, ist auch $\ker L'$ endlichdimensional.

Schritt 2 Sei X_0 abgeschlossenes Komplement von $\ker L$. Dann existiert $\mu > 0$ mit

$$\|Lx\| \geq \mu \|x\| \text{ für alle } x \in X_0.$$

Andernfalls finde $x_k \in X_0$, $\|x_k\| = 1$, mit $\|Lx_k\| < \frac{1}{k}$. Wir können $Kx_k \to x \in X$ annehmen. Dann folgt aber

$$x_k = Lx_k - Kx_k \to -x, \text{ also } x \in X_0 \text{ und } \|x\| = 1.$$

Aber $Lx = \lim_{k\to\infty} Lx_k = 0$, ein Widerspruch.

Schritt 3 $\mathrm{Bild}\, L$ ist abgeschlossen.
Sei $y_k = Lx_k \to y \in X$. Wir können $x_k \in X_0$ annehmen. Dann folgt aus Schritt 2

$$\|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{\mu}\|L(x_k - x_l)\| = \frac{1}{\mu}\|y_k - y_l\| \to 0 \quad \text{mit } k, l \to \infty.$$

Also konvergiert $x_k \to x$, und $y = \lim_{k\to\infty} Lx_k = Lx \in \mathrm{Bild}\, L$.

Schritt 4 $(\mathrm{coker}\, L)' \cong \ker L'$ nach Satz 8.2.
Zusammen mit Schritt 1 folgt $\dim \mathrm{coker}\, L < \infty$, damit ist L Fredholm.

Schritt 5 Bestimmung des Fredholmindex
In Satz 8.5 unten zeigen wir, dass die Menge der Fredholmperatoren offen ist und der Index lokal konstant. Somit ist die Funktion $t \mapsto \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} + tK)$ konstant, also gleich Null. □

Lemma 8.5 (Additivität des Fredholmindex) *Seien $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ Fredholm. Dann ist $TS : X \to Z$ Fredholm und es gilt*

$$\mathrm{ind}(TS) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T).$$

Beweis: Es ist $S : \ker TS \to \mathrm{Bild}\, S \cap \ker T$ surjektiv mit Kern $\ker S$, also gilt

$$\dim\, \ker TS = \dim\, \ker S + \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) < \infty.$$

Wähle nun Komplemente $\ker T = (\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) \oplus Y_0$, und dann $Y = \mathrm{Bild}\, S \oplus Y_0 \oplus Y_1$. Es folgt die direkte Summe $\mathrm{Bild}\, T = \mathrm{Bild}\, TS \oplus TY_1$ (check!), also

$$\dim\, \mathrm{coker}\, TS = \dim\, \mathrm{coker}\, T + \dim\, Y_1 < \infty.$$

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} \dim\, \ker T - \dim\, \mathrm{coker}\, S &= \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) + \dim\, Y_0 - (\dim\, Y_0 + \dim\, Y_1) \\ &= \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) - \dim\, Y_1. \end{aligned}$$

Durch Kombination der drei Gleichungen ergibt sich die Behauptung. □

Satz 8.5 *Sei $L : X \to Y$ Fredholmoperator. Dann hat L in $L(X,Y)$ eine Umgebung, die aus Fredholmperatoren mit demselben Index besteht.*

Beweis: Wähle abgeschlossene Komplemente $X = X_0 \oplus \ker L$ und $Y = \operatorname{Bild} L \oplus Y_1$, insbesondere $\dim Y_1 < \infty$. Die Projektionen auf die Komponenten sind dann stetig. Für $S \in L(X,Y)$ setze $S_0 : X_0 \to \operatorname{Bild} L$, $S_0 = P_{\operatorname{Bild} L} S\, i_{X_0}$, wobei i_{X_0} die Inklusionsabbildung ist. Es gilt

$$\|S_0 - L_0\| = \|P_{\operatorname{Bild} L}(S - L)\, i_{X_0}\| \leq C\,\|S - L\|.$$

L_0 ist ein Isomorphismus, also auch S_0 für $\|S - L\| < \varepsilon$. Dann ist S Fredholmoperator:

- Die Projektion $\ker S \to X/X_0$ ist injektiv: aus $Sx = 0$ für $x \in X_0$ folgt $S_0 x = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0} x = 0$ und somit $x = 0$.

- Die Projektion $Y_1 \to Y/\operatorname{Bild} S$ ist surjektiv: zu $y \in Y$ wähle $x \in X_0$ mit $S_0 x = P_{\operatorname{Bild} L} y$, also $P_{\operatorname{Bild} L}(y - Sx) = 0$ bzw. $y - Sx \in Y_1$.

In $S_0 = P_{\operatorname{Bild} L} S\, i_{X_0}$ sind also alle Operatoren Fredholm. Es folgt aus Lemma 8.5

$$0 = \operatorname{ind} S_0 = \dim \operatorname{coker} L + \operatorname{ind} S - \dim \ker L = \operatorname{ind} S - \operatorname{ind} L.$$

□

Als Ergänzung hier die benötigten Fakten zur Wahl von Komplementen.

Lemma 8.6 *Sei V Unterraum eines Banachraums X.*

(a) *Ist* $\dim V < \infty$ *oder* $\dim X/V < \infty$, *so hat V ein abgeschlossenes Komplement.*

(b) *Ist $X = V \oplus W$ für abgeschlossene Unterräume V, W, so sind P_V, P_W stetig.*

Beweis: Wir beginnen mit (a) im Fall $\dim V = n < \infty$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die duale Basis von V', also $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Nach Hahn-Banach, Satz 3.1, haben die φ_i eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_i \in X'$. Definiere die stetige lineare Abbildung

$$P \in L(X,V),\ Px = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) v_i.$$

Es folgt $Pv_j = v_j$, $P^2 = P$ und $P|_V = \mathrm{Id}_V$. Für $x \in X$ folgt $x = Px + (x - Px) \in V \oplus \ker P$. Der Raum $\ker P$ ist ein Komplement wie verlangt.

Für $\dim X/V = n < \infty$ wähle eine Basis $[x_1], \ldots, [x_n]$ von X/V. Dann ist $\operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein endlichdimensionales, also abgeschlossenes, Komplement.

In (b) ist $V \times W$ mit der Produktnorm ein Banachraum, und die Abbildung $V \times W \to X$, $(v,w) \mapsto v + w$, ist bijektiv und stetig. Nach Satz 4.4 ist auch die Inverse stetig, und damit die Projektionen P_V, P_W auf die Komponenten. □

Wir können nun unsere Analysis des Dirichletproblems auf elliptische Operatoren erweitern, die Terme niederer Ordnung enthalten.

Satz 8.6 (Fredholmsche Alternative für das Dirichletproblem) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den schwach definierten Operator*

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) - \sum_{j=1}^n \partial_j(b^j u) + \sum_{j=1}^n c^j \partial_j u + qu$$

mit $\|a^{ij}\|_{L^\infty}$, $\|b^j\|_{L^\infty}$, $\|c^j\|_{L^\infty}$, $\|q\|_{L^\infty} \leq M$. Es gebe ein $\lambda > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{8.42}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *L ist Fredholmoperator vom Index Null.*

(2) $\phi \in \operatorname{Bild} L \quad \Leftrightarrow \quad \phi(u) = 0$ *für alle $u \in \ker L^*$.*

(3) *Für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt mit einer Konstanten $C = C(\lambda, M, \operatorname{diam}\Omega)$*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\big(\|Lu\|_{W^{1,2}(\Omega)'} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)'}\big).$$

Hier ist L^* der formal adjungierte Operator zu L, definiert durch

$$L^* : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ L^*u(v) = Lv(u). \tag{8.43}$$

Wir berechnen explizit

$$\begin{aligned} Lv(u) &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v \partial_j u + \sum_{j=1}^n b^j v(\partial_j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j v)u + qvu\Big) \\ &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a^{ji}\partial_i u \partial_j v + \sum_{j=1}^n c^j u(\partial_j v) + \sum_{j=1}^n b^j(\partial_j u)v + quv\Big). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die (schwache) Darstellung

$$L^*u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ji}\partial_i u) - \sum_{j=1}^n \partial_j(c^j u) + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j u + qu. \tag{8.44}$$

Die Koeffizienten von L^* ergeben sich also durch formale partielle Integration. Sind L^*u und Lv als L^2-Funktionen darstellbar, so gilt in der Tat

$$\langle L^*u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = L^*u(v) = Lv(u) = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Der Operator L^* ist adjungierter Operator von L bezüglich des L^2-Skalarprodukts. Er ist nicht die Hilbertraumadjungierte von $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ im Sinne von Folgerung 5.3. Um den Satz zu beweisen, untersuchen wir erst die Terme niederer Ordnung.

Lemma 8.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\|b^j\|_{L^\infty}$, $\|c^j\|_{L^\infty}$, $\|q\|_{L^\infty} \leq M < \infty$. Dann ist*

$$K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Ku = -\sum_{j=1}^n \partial_j(b^j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j u) + qu,$$

ein kompakter Operator.

Beweis: Nach Rellich, Satz 8.1, ist die Einbettung $E : W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt. Da die Rieszabbildung $I : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)'$, $Iu(v) = \int_\Omega uv$, stetig ist, folgt mit Lemma 8.3 auch die Kompaktheit von

$$E'I : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ (E'If)(v) = If(Ev) = \int_\Omega fv.$$

Daraus folgt die Kompaktheit der drei Abbildungen, wieder mit Lemma 8.3,

$$\begin{array}{ccccc}
W_0^{1,2}(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) & \longrightarrow & W_0^{1,2}(\Omega)' \\
u & \overset{E}{\longmapsto} & u & \overset{-\partial_j b^j}{\longmapsto} & -\partial_j(b^j u) \\
u & \overset{c^j\partial_j}{\longmapsto} & c^j\partial_j u & \overset{E'I}{\longmapsto} & c^j\partial_j u \\
u & \overset{E}{\longmapsto} & u & \overset{q}{\longrightarrow} & qu.
\end{array}$$

□

Beweis: (*von Satz 8.6*) Schreibe $L = L_0 + K$ mit $L_0 = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_j u)$. Dann ist $L_0 : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ Isomorphismus nach Satz 5.7, und K ist kompakt nach Lemma 8.7. Somit ist L ein Fredholmoperator vom Index Null nach Riesz-Schauder, Satz 8.4.

Im Beweis von 8.4, Schritt 4, wurde für den Operator $L : X \to Y$ gezeigt, dass folgende Abbildung wohldefiniert und surjektiv ist:

$$F : \ker L' \to (Y/\operatorname{Bild} L)',\, F\varphi([y]) = \varphi(y).$$

Damit ist $y \in \operatorname{Bild} L$ genau wenn $\varphi(y) = 0$ für alle $\varphi \in \ker L'$. In unserm Fall ist $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ Hilbertraum, und $Y = W_0^{1,2}(\Omega)'$. Ist $J : X \to X''$ der kanonische Isomorphismus, so gilt

$$L'J = L^*, \quad \text{denn } (L'Ju)(v) = (Ju)(Lv) = (Lv)(u) = (L^*u)(v).$$

Insbesondere folgt $\ker L' = J \ker L^*$, und damit

$$\phi \in \operatorname{Bild} L \quad \Leftrightarrow \quad \phi(u) = Ju(\phi) = 0 \text{ für alle } u \in \ker L^*.$$

Für Aussage (3) liefert die Elliptizität

$$\lambda \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \le L_0 u(u) = Lu(u) - Ku(u) \le \|Lu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + |Ku(u)|.$$

Weiter gilt nach Voraussetzung an die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
|Ku(u)| &= \Big| \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n b^j u(\partial_j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j u)u + qu^2 \Big) \Big| \\
&\le CM\Big(\int_\Omega |u||Du| + \int_\Omega |u|^2 \Big) \\
&\le \varepsilon \int_\Omega |Du|^2 + C(M,\varepsilon) \int_\Omega |u|^2.
\end{aligned}$$

Wir wählen $\varepsilon = \lambda/2$ und absorbieren:

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(M,\lambda) \Big(\|Lu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \int_\Omega |u|^2 \Big).$$

Nun gilt $\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\text{diam } \Omega) \|Du\|^2_{L^2(\Omega)}$ nach Poincaré, Satz 5.4. Ferner

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{v \in W^{1,2}_0(\Omega),\, \|v\|_{W^{1,2}} \leq \|u\|_{W^{1,2}}} \int_\Omega uv \leq \|u\|_{W^{1,2}_0(\Omega)'} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Durch Kürzen von $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ folgt Behauptung (3). □

9 Spektralsatz für elliptische Randwertprobleme

In diesem Abschnitt beweisen wir einen Spektralsatz für elliptische Randwertprobleme. Diese Anwendung würde aus dem allgemeinen Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren folgen, den wir aber aus Zeitgründen nicht behandeln können. Wir beginnen mit ein paar Grundlagen zu Hilberträumen.

Definition 9.1 *Der Hilbertraum X heißt Hilbertsumme der abgeschlossenen Unterräume E_i, $i \in I$, falls gilt:*

(1) $E_i \perp E_j$ *für $i \neq j$,*

(2) $\bigoplus_{i \in I} E_i$ *ist dicht in X.*

Lemma 9.1 *Seien E_i, $i \in \mathbb{N}$, abgeschlossene, paarweise orthogonale Unterräume des Hilbertraums X, mit zugehörigen Orthogonalprojektionen P_i. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $x \perp E_i$ *für alle i* $\Rightarrow$ $x = 0$ *(Maximalität).*

(2) *X ist Hilbertsumme der E_i.*

(3) $x = \sum_{i=1}^\infty P_i x$ *für alle $x \in X$* *(Vollständigkeit).*

(4) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \|P_i x\|^2$ *für alle $x \in X$* *(Parsevalsche Gleichung).*

Beweis: Der Reihe nach:

(1) ⇒ (2): Setze $E = \overline{\bigoplus_{i=1}^\infty E_i}$. Nach (1) ist $E^\perp = \{0\}$, also nach dem Projektionssatz $X = E$.

(2) ⇒ (3): Sei $y \in \bigoplus_{i=1}^N E_i$. Dann folgt

$$\|x-y\|^2 = \Big\| \underbrace{x - \sum_{i=1}^N P_i x}_{\perp E_j \text{ für } 1 \leq j \leq N} + \underbrace{\sum_{i=1}^N P_i x - y}_{\in \bigoplus_{i=1}^N E_i} \Big\|^2 = \Big\| x - \sum_{i=1}^N P_i x \Big\|^2 + \underbrace{\Big\| \sum_{i=1}^N P_i x - y \Big\|^2}_{\geq 0}.$$

Daraus folgt

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^N P_i x \Big\| = \text{dist}\Big(x, \bigoplus_{i=1}^N E_i\Big) \to 0 \text{ mit } N \to \infty.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Wegen Stetigkeit des Skalarprodukts gilt

$$\langle x, x\rangle = \lim_{N\to\infty} \Big\langle \sum_{i=1}^N P_i x, \sum_{i=1}^N P_i x \Big\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \|P_i x\|^2.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Aus $P_i x = 0$ für alle i folgt direkt $x = 0$. $\square$

Bemerkung. Im Fall $\dim E_i = 1$, $E_i = \operatorname{Span} e_i$ mit $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, lautet das so:

(1) $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist maximales ON-System.

(2) Endliche Linearkombinationen der e_i sind dicht.

(3) $x = \sum_{i=1}^\infty \langle x, e_i\rangle\, e_i$ (Fourierentwicklung).

(4) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i\rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung).

Wir kommen zum Eigenwertproblem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + qu,$$

wobei für die Koeffizienten folgende Voraussetzungen gelten:

(9.45) Elliptizität: $\exists\, \mu > 0 : a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2 \quad \forall\, x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^n$,

(9.46) Beschränktheit: $\|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M < \infty$,

(9.47) Symmetrie: $a^{ij} = a^{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Der Einfachheit halber vereinbaren wir, das Summenzeichen wegzulassen wenn über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist. Wir definieren die symmetrische Bilinearform und zugehörige quadratische Form

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_\Omega (a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + quv), \\ Q(u) &= \int_\Omega (a^{ij}\partial_i u\, \partial_j u + qu^2) \quad (= B(u,u)). \end{aligned}$$

Wir betrachten L als Operator auf einem abgeschlossenen Unterraum $V \subset W^{1,2}(\Omega)$:

$$L : V \to V',\ Lu(v) = B(u,v), \qquad \text{wobei } W_0^{1,2}(\Omega) \subset V.$$

Das schwache Formulierung des Eigenwertproblems lautet dann

$$Lu = \lambda u \quad \text{in } V' \quad \Leftrightarrow \quad B(u,v) = \lambda\langle u, v\rangle_{L^2} \text{ für alle } v \in V. \tag{9.48}$$

Mit der Wahl von V lassen sich verschiedene Randbedingungen schwach formulieren.

Beispiel 9.1 Im Dirichletproblem wählen wir wie bisher $V = W^{1,2}_0(\Omega)$:

$$\int_\Omega \big(a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + quv\big) = \lambda \int_\Omega uv \quad \text{für alle } v \in W^{1,2}_0(\Omega).$$

Nach formaler partieller Integration bedeutet das

$$\begin{aligned} -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + qu &= \lambda u \quad \text{in } \Omega,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beispiel 9.2 Im freien Randwertproblem wählt man $V = W^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \big(a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + quv\big) = \lambda \int_\Omega uv \quad \text{für alle } v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Hier ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$, es sind a priori keine Randwerte vorgeschrieben. Testen mit $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ ergibt wie beim Dirichletproblem formal die Differentialgleichung

$$-\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + qu = \lambda u \quad \text{in } \Omega.$$

Durch Testen mit $v \in W^{1,2}(\Omega)$ folgt, weiter formal:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \big(a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + (q-\lambda)uv\big)\\ &= \int_\Omega \big(\underbrace{-\partial_j\big(a^{ij}\partial_i u\big) + (q-\lambda)u}_{=0}\big) + \int_{\partial\Omega} \nu^j a^{ij}(\partial_i u) v\, d\mu. \end{aligned}$$

Ist $v|_{\partial\Omega}$ beliebig wählbar, so ergibt sich mit dem Fundamentallemma die Randbedingung

$$a^{ij}(\partial_i u)\nu^j = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Im Fall $L = -\Delta$, also $a^{ij} = \delta_{ij}$, ist das die homogene Neumann-Bedingung $\partial_\nu u = 0$.

Allgemeiner könnten auf einem Teil von $\partial\Omega$ Nullrandwerte vorgeschrieben werden, auf dem Komplement könnten sie frei wählbar sein.

Satz 9.1 (Spektralsatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, und es sei $W^{1,2}_0(\Omega) \subset V \subset W^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir betrachten den ellliptischen, symmetrischen Operator mit beschränkten Koeffizienten*

$$L : V \to V',\ Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_j u) + qu.$$

Dann gibt es eine Folge $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ von Eigenwerten mit zugehörigem $L^2(\Omega)$-Orthonormalsystem $v_k \in V$ von Eigenfunktionen, so dass Folgendes gilt:

(1) *Sei $E_\lambda(L) = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$. Die v_k mit $\lambda_k = \lambda$ sind eine ON-Basis von $E_\lambda(L)$.*

(2) $\dim E_\lambda(L) < \infty$ *und $\lambda_k \nearrow \infty$ mit $k \to \infty$.*

(3) *$L^2(\Omega)$ ist Hilbertsumme der $E_{\lambda_k}(L)$.*

Beweis:
Schritt 1 *Konstruktion der Eigenwerte und Eigenfunktionen*
Sei $V_0 = \{0\}$ sowie induktiv für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf\{Q(v) : v \in V,\, \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1,\, v \perp_{L^2} V_{k-1}\}, \\ v_k &= \text{zugehörige Minimalstelle von } Q(v), \\ V_k &= V_{k-1} \oplus \{v_k\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten v_k wie folgt: zunächst gilt für $u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\|Du\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{\mu} \int a^{ij} \partial_i u \, \partial_j u \leq \frac{1}{\mu}\big(Q(u) + M\|u\|^2_{L^2}\big). \tag{9.49}$$

Also folgt $\lambda_1 \geq -M$ und dann $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$. Wähle eine Folge Minimalfolge $u_j \in V$, also $u_j \perp V_{k-1}$, $\|u_j\|_{L^2} = 1$, und $Q(u_j) \to \lambda_k$. Dann ist

$$\|Du_j\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{\mu}\big(Q(u_j) + M\big) \to \frac{1}{\mu}(\lambda_k + M) < \infty.$$

Wir brauchen nun den Satz von Rellich, siehe Satz 8.1 im Fall $V = W^{1,2}_0(\Omega)$. Der Satz gilt auch für Folgen in $W^{1,2}(\Omega)$, wenn das Gebiet C^1-Rand hat. Es folgt:

- $u_j \to u$ in $L^2(\Omega)$, insbesondere $\|u_j\|_{L^2} = 1$, $u_j \perp_{L^2} V_{k-1}$
- $u_j \to u$ schwach in $W^{1,2}(\Omega)$, insbesondere $u \in V$ (nach Folgerung 3.1 ist der abgeschlossene Unterraum V auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz).
- $Du_j \to Du$ schwach in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Es gilt nun in Kurznotation, da a symmetrisch,

$$\int_\Omega a(Du_j, Du_j) = \int_\Omega a(Du, Du) + 2 \underbrace{\int_\Omega a(D(u_j - u), Du)}_{\to 0 \text{ mit } j \to \infty} + \underbrace{\int_\Omega a(D(u_j - u), D(u_j - u))}_{\geq 0}.$$

Da u die Nebenbedingungen $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $u \perp_{L^2} V_{k-1}$ erfüllt, folgt

$$\lambda_k \leq Q(u) \leq \liminf_{k \to \infty} Q(u_j) = \lambda_k.$$

Also ist $v_k := u$ Minimalstelle, und wegen $\dim V = \infty$ bricht die Induktion nicht ab.

Schritt 2 *Nachweis der Eigenfunktionsgleichung*
Sei $v \in V$ mit $v \perp_{L^2} V_k$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Da v_k Minimalstelle, gilt

$$0 = \frac{d}{dt} Q\big((\cos t)v_k + (\sin t)v\big)|_{t=0} = 2B(v_k, v).$$

Daraus folgt induktiv mit der Symmetrie von B

$$B(v_k, v_j) = B(v_j, v_k) = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq k-1.$$

Insgesamt ergibt sich für alle $v \in V$

$$B(v_k, v) = \lambda_k \langle v_k, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{ mit } \lambda_k = Q(v_k).$$

Wegen $W^{1,2}_0(\Omega) \subset V$ impliziert das die Differentialgleichung $Lv_k = \lambda_k v_k$.

Schritt 3 *Verhalten der Eigenwerte, Vollständigkeit*
Wir zeigen zunächst $\lambda_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Wäre $\lambda_k \leq \Lambda < \infty$, so folgt aus (9.49)

$$\|Dv_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\Big(\underbrace{Q(v_k)}_{=\lambda_k} + M\Big) \leq \frac{1}{\mu}(\Lambda + M).$$

Nach Rellich gibt es eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Aber

$$\|v_k - v_l\|^2 = 2 \quad \text{für } k \neq l, \text{ Widerspruch.}$$

Es folgt, dass unsere Konstruktion alle Eigenräume von L bestimmt. Denn Eigenfunktionen $u, v \in V$ zu Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ stehen senkrecht:

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)} = B(u,v) - B(v,u) = 0.$$

Ist $u \in V$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, Eigenfunktion zu einem Eigenwert $\lambda > \lambda_{k-1}$, so folgt

$$\lambda \geq \inf\{Q(v) : v \in V,\, \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1,\, v \perp_{L^2} V_{k-1}\} = \lambda_k.$$

Damit gibt es zu jedem Eigenwert λ einen nichtleeren, maximalen Abschnitt $k_- \leq k \leq k_+$, $k_\pm \in \mathbb{N}$, mit $\lambda_k = \lambda$. Würden die zugehörigen Eigenfunktionen v_k den Eigenraum nicht aufspannen, so gäbe es eine weitere normierte, dazu orthogonale Eigenfunktion, und wir hätten $\lambda_{k_+ +1} = \lambda$ im Widerspruch zur Maximalität. Es bleibt nun die Vollständigkeit zu beweisen, dazu zeigen wir für alle $u \in V$ die Entwicklung

$$u_N = \sum_{k=1}^N \langle u, v_k\rangle_{L^2(\Omega)} v_k \to u \quad \text{ in } L^2(\Omega). \tag{9.50}$$

Da $V \supset W^{1,2}_0(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$, folgt hieraus die L^2-Vollständigkeit der v_k. Es gilt

$$\sum_{k=1}^N \langle u, v_k\rangle^2_{L^2(\Omega)} = \|u_N\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_N\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u - u_N\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Also ist u_N eine $L^2(\Omega)$-Cauchyfolge und konvergiert gegen ein u_0 in $L^2(\Omega)$; zu zeigen ist $u_0 = u$. Da $u - u_N \in V$ zulässige Testfunktion und $u - u_N \perp_{L^2} v_k$ für $k \leq N$, gilt

$$B(u_N, u - u_N) = \sum_{k=1}^N \langle u, v_k\rangle_{L^2} B(v_k, u - u_N) = \langle u, v_k\rangle_{L^2} \lambda_k \langle v_k, u - u_N\rangle_{L^2} = 0.$$

Wir schätzen damit ab

$$\begin{aligned}
\|Du_N\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\mu}\big(B(u_N, u_N) + M\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big) \quad \text{(nach (9.49))}\\
&= \frac{1}{\mu}\big(B(u, u_N) + M\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\\
&\leq \frac{1}{\mu}\big(\|Lu\|_{V'}\, \|u_N\|_{W^{1,2}(\Omega)} + M\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\\
&\leq \frac{1}{2}\|Du_N\|^2_{L^2(\Omega)} + c(\mu, M)\big(\|Lu\|^2_{V'} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big).
\end{aligned}$$

Also ist u_N beschränkt in $W^{1,2}(\Omega)$ und konvergiert gegen u_0 schwach in $W^{1,2}(\Omega)$, insbesondere gilt $u_0 \in V$. Aber $\langle u-u_0, v_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{N\to\infty}\langle u-u_N, v_k\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ für alle k. Wegen $u-u_0 \in V$ folgt nach Definition der λ_k

$$\|u-u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_k} Q(u-u_0) \to 0 \text{ mit } k \to \infty.$$

Damit ist (9.50), die $L^2(\Omega)$-Vollständigkeit der Eigenfunktionen, bewiesen. □

Wir wollen noch die Verbindung zum Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren andeuten. Wir nehmen zunächst an, dass der Operator L aus Satz 9.1 injektiv ist. Der Operator ist selbstadjungiert, also $L^* = L$, nach Satz 8.6(2) ist L dann invertierbar. Wir haben dort nur das Dirichletproblem betrachtet, die Aussage gilt aber analog. Definiere nun den Greenschen Operator $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \xrightarrow{G} & L^2(\Omega) \\ E'I \big\downarrow & & \big\uparrow E \\ V' & \xrightarrow{L^{-1}} & V \end{array}$$

$E : V \subset L^2(\Omega)$ ist die Einbettung, $I : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)'$ der Riesz-Isomorphismus und $E' : L^2(\Omega)' \subset V'$ die transponierte Abbildung. Die Funktion $u = Gf \in V$ ist die eindeutige Lösung des Problems

$$Lu = f \quad \Leftrightarrow \quad Lu(v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } v \in V.$$

G ist symmetrisch auf $L^2(\Omega)$, denn mit $Gf_i = u_i$, $i = 1, 2$, gilt

$$\langle f_1, Gf_2\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f_1, u_2\rangle_{L^2(\Omega)} = Lu_1(u_2) = Lu_2(u_1) = \langle f_2, Gf_1\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Weiter ist E und damit G kompakt nach Rellich, Satz 8.1. Daher kann der allgemeine Spektralsatz für kompakte, symmetrische Operatoren auf G angewandt werden. L und G haben dieselben Eigenräume, die Eigenwerte sind Kehrwerte:

$$Lu = \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad Gu = \frac{1}{\lambda} u.$$

Die Eigenwerte sind jeweils nicht Null: L ist injektiv nach Voraussetzung, für G ist das offensichtlich. Ist L nicht injektiv bzw. ist das unklar, so kann als Trick der Operator $L + c\,\mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{R}$, betrachtet werden. Es gilt

$$(L + c\,\mathrm{Id})u(u) \geq \mu \int_\Omega |Du|^2 + \int_\Omega (q+c)u^2.$$

Für $c > \|q_-\|_{L^\infty(\Omega)}$ ist $L + c\,\mathrm{Id}$ also injektiv, und auf den zugehörigen Greenschen Operator kann der Spektralsatz angewandt werden. Der gegebene Beweis ist dennoch sehr instruktiv, weil er die Interpretation der Eigenfunktionen als Grund- bzw. angeregte Zustände deutlich macht.