Übungsaufgaben zur Vorlesung
Komplexe Geometrie und Kähler-Einstein Metriken — WS 09/10, Serie 11
PD Dr. M. Simon — 11.Januar 2010
Florian Link

In den folgenden Aufgaben wird immer auf den Kontext/die Notation aus der Vorlesung Bezug genommen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß für die Kählerformen ω_g und ω_l aus der Vorlesung in einem fixierten Punkt p und geeigneten Koordinaten

$$(\omega_g)^{n-j-1} \wedge (\omega)^j = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(j)} i^{n-1} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz^k \wedge d\bar{z}^k} \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n$$

für $0 \leq j \leq n-1$ und $b_k^{(j)} \geq 0$. Hierbei bedeutet $\widehat{\quad}$ wie üblich, daß die darunterliegende Form auszulassen ist.

Aufgabe 2 (Lemma 8.2 aus der Vorlesung) (4 Punkte)
Weisen Sie nach, daß für Kählermetriken l und $g_i := l + \partial\bar{\partial}\varphi_i$ $(i = 1, 2)$ mit induzierten Kählerformen ω_i

$$\frac{1}{2} dd_c(\varphi_1 - \varphi_2) \wedge \Big((\omega_1)^{n-1} + (\omega_1)^{n-2} \wedge \omega_2 + \ldots + \omega_1 \wedge (\omega_2)^{n-2} + (\omega_2)^{n-1} \Big) = -(\omega_1)^n + (\omega_2)^n$$

gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe der Vorlesung, daß für Kähler-Einstein-Metriken g_1, g_2 auf einer Kählermannigfaltigkeit (M, l) mit $c_1(M) < 0$ und induzierten Kählerformen $\omega_l, \omega_1, \omega_2$ respektive, welche in der Kählerklasse von ω_l enthalten sind ($\omega_1, \omega_2 \in K_{\omega_l}$), $g_1 = g_2$ gilt.

Zusatz: Falls

$$\log\det(l + \partial\bar{\partial}\varphi_i) - \log\det(l) - \varphi_i - f = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

so folgt

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 18.01.2010 bis 15:00 Uhr.