Übungsaufgaben zur Vorlesung
Komplexe Geometrie und Kähler-Einstein Metriken — WS 09/10, Serie 9
PD Dr. M. Simon — 14.Dezember 2009
Florian Link

In den folgenden Aufgaben wird immer auf den Kontext/die Notation aus der Vorlesung Bezug genommen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
a) $f : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f > 0$ erfülle die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq \Delta_{l(t)} f - c_2 f^2 + c_1 f + c_0,$$

wobei $c_2 \in (0,\infty),\ c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ und $\{h(t)\}$ eine glatte Einparameterfamilie von riemannschen Metriken sei. Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips

$$sup_M f(\cdot,t) \leq \frac{\alpha(c_2,c_1,c_0)}{t}$$

für eine Konstante α.
b) (Verallgemeinerung von Lemma 7.6)
$f : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ mit $f > 0$ erfülle

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq \Delta_{l(t)} f - c_2 f^p + c_1 f^q + c_0,$$

wobei $0 < q < p < \infty,\ c_2 \in (0,\infty),\ c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ und $\{h(t)\}$ eine glatte Einparameterfamilie von riemannschen Metriken sei. Zeigen Sie wieder mit Hilfe des Maximumprinzips, daß eine Konstante $K_0 = K_0\left(c_2, c_1, c_0, p, q, sup_M |f(\cdot,0)|\right) < \infty$ unabhängig von T existiert, sodaß

$$sup_{M\times[0,T)} f \leq K_0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Weisen Sie nach, daß für $\varphi \in C^\infty(M^{2n}, \mathbb{C})$ die partiellen Ableitungen vertauschen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^j \partial z^i}, \text{bzw. } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial z^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^j \partial z^i}, \text{bzw. } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^i \partial \bar{z}^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^j \partial \bar{z}^i}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Schließen Sie die Lücke der Rechnung aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, daß

$$g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \left(l^{s\bar{t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^s \partial \bar{z}^t} \right) = \sum_{i,s=1}^{n} \left(-g^{i\bar{i}} \frac{\partial^2 l_{s\bar{s}}}{\partial \bar{z}^i \partial z^i} \varphi_{s\bar{s}} + g^{i\bar{i}} \varphi_{i\bar{i}s\bar{s}} \right).$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 21.12.2009 bis 15:00 Uhr.