Aufgabe 1 *(Bogenlänge)*
Sei $u \in C^1([a,b])$. Berechnen Sie die Länge $L(u)$ von $\gamma(x) = (x, u(x))$, $x \in [a,b]$. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichung des Funktionals.

Aufgabe 2 *(Partielle Integration)*
Seien f, g auf dem Rechteck $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ stetig differenzierbar, und $fg = 0$ auf dem Rand. Zeigen Sie für $i = 1, 2$

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (\partial_i f) g \, dxdy = - \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f (\partial_i g) \, dxdy.$$

Aufgabe 3 *(Eine Flächenformel)*
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c F \cdot ds$ für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x),$$

wobei der Weg c jeweils eine geeignete Parametrisierung des Randes der folgenden Gebiete in $\mathbb{R}^2$ ist:

(a) Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

(b) Ellipse mit den Halbachsen $a, b > 0$.

(c) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$, wobei $f \in C^1([a,b])$ mit $f \geq 0$.

Aufgabe 4*(Schiefer Wurf)*
Es beschreibe $c \in C^2([0,T], \mathbb{R}^2)$, $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, die Bewegung eines Teilchens der Masse $m > 0$ unter dem Einfluss der Schwerkraft $(0, -g)$. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet

$$L(t, x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) + mgx_2.$$

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und berechnen Sie die Bewegung mit den Anfangsdaten

$$c(0) = (0,0),\ c'(0) = v_0 (\cos\alpha, \sin\alpha),\ \text{wobei } v_0 > 0 \text{ und } \alpha \in (0, \pi/2].$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 24.6.2013, vor der Vorlesung.