Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

PD Dr. Julian Scheuer — WS 2018/19
Blatt 5 — 22. November 2018

Aufgabe 5.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.[1] Seien $x_i \in C^1(I_i, \Omega)$, $i = 1, 2$, maximal definierte Integralkurven von f, die sich schneiden. Beweisen Sie:
Es existiert $\tau \in \mathbb{R}$, sodass $I_1 = I_2 + \tau$ und

$$x_1(t + \tau) = x_2(t) \quad \forall t \in I_2.$$

Aufgabe 5.2

Sei $J = [0, b)$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ beschränkt und nehme an, $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ löse die Differentialungleichung

$$\dot{x}(t) \geq g(t)x(t) \quad \forall t \in J.$$

Beweisen Sie: Falls $x(0) \geq 0$, so gilt auch $x(t) \geq 0$ $\forall t \in J$.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis von Lemma 2.2.2 der Vorlesung leiten. Sollten Sie Schwierigkeiten damit haben, dass $x(0) = 0$ sein kann, versuchen Sie zu zeigen, dass $x(t) > 0$ für alle t ist, falls $x(0) > 0$ gilt.

Die Abgabe Ihrer Lösungen ist freiwillig und hat keinen Einfluss auf die Klausurzulassung.
Wir empfehlen trotzdem dringend, die Aufgaben zu bearbeiten. Sie dürfen Ihre Lösungen abgeben und diese werden korrigiert. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.
Mindestens eine der beiden Aufgaben hat Klausurniveau, nur zu Ihrer Orientierung.
Abgabe: 29.11. in der Vorlesung.

---

[1] f ist ein autonomes Vektorfeld